



CIMAT

Sistemas Inmovilizadores de Cuerpos Convexos

Tesis que para obtener el Grado de Doctor en
Ciencias con Orientación en Matemáticas
Básicas presenta

Efrén Morales Amaya

Director de Tesis:

Dr. Vladimir Boltyanski

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Guanajuato, Gto., México
Enero de 1999.



CIMAT
BIBLIOTECA

Índice General

Agradecimientos	3
Introducción	6
1 El Funcional md en la Geometría Combinatoria	10
1.1 Preliminares	10
1.1.1 Elementos de Convexidad	10
1.1.2 Definición del Funcional md. Sistemas Globales de Vectores	13
1.1.3 Las Funciones Distancia $F(x)$ y Soporte $H(u)$ de un Cuerpo Convexo y la Geometría de Minkowski	15
1.1.4 Dualidad Polar en Convexidad	17
1.2 El Problema de Szökefalvi-Nagy	20
1.2.1 Historia del Problema	20
1.2.2 Cuerpos de Boltianski	27
1.2.3 Cuerpos de Kincses	34
1.3 Dos Generalizaciones Interesantes de la Convexidad Lineal: d -convexidad y h -convexidad. El Teorema de Helly para Conjuntos d -convexos	34
1.3.1 d -convexidad	35
1.3.2 h -convexidad	35
1.3.3 La Dimensión de Helly de los Conjuntos d -convexos	36
2 Sistemas Inmovilizadores de Cuerpos Convexos	39
2.1 Cardinalidades Mínimas de Sistemas Inmovilizadores	39
2.1.1 El Problema de Inmovilizar un Objeto	39
2.1.2 Inmovilización Según L. Fejes Tóth. Historia del Problema	39
2.1.3 Resultados de V. G. Boltianski y H. Martini para $\varrho_{\min}(M)$: la cota superior	42

C I M A T
B I B L I O T E C A

015960

2.2	Cardinalidades Máximas de Sistemas Inmovilizadores Primitivos . . .	44
2.2.1	La Conjetura de Danzer	44
2.2.2	El Contra-ejemplo de Boltianski - Martini	47
2.3	Sistemas Inmovilizadores Primitivos para Cuerpos Convexos Descomponibles en Suma Vectorial Directa: Un Teorema Importante	49
3	Nuevos Resultados de Sistemas Inmovilizadores	56
3.1	Resultados de V. G. Boltianski y E. Morales Amaya para $\varrho_{\min}(M)$: la cota inferior	56
3.2	Sistemas Inmovilizadores Minimales para Cuerpos de Boltianski y Cuerpos de Kincses	62
3.3	El Problema de Fejes Tóth	68
3.3.1	Solución al Problema de Fejes Tóth para los Casos $\varrho_{\min}(M) = 2n, 2n - 1$	68
3.3.2	Solución al Problema de Fejes Tóth para Cuerpos Centralmente Simétricos con $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2, 2n - 3$	70
3.4	Una Nota Sobre Sistemas Inmovilizadores Primitivos Maximales de Cuerpos Convexos	71
3.5	Poliedro de 14 Vértices Inmovilizado Primitivamente por sus Vértices	76
3.6	Una Cota Superior para Cardinalidades de Sistemas Inmovilizadores Primitivos Maximales en Función de $\dim M$ y $\text{md } M$	79
3.6.1	Primera Solución	80
3.6.2	Segunda Solución	82
3.6.3	Estimación Para las Cardinalidades Máximas de Sistemas Inmovilizadores Primitivos	84
	Bibliografía	88

Agradecimientos

Para la realización de mis estudios de Doctorado así como para la realización del presente trabajo Doctoral recibí numerosos apoyos de naturaleza por demás variada. Dichos apoyos fueron de alguno de los siguientes tipos: económicos, académicos, profesionales, familiares y morales.

En la mayoría de estos casos, el número de personas y el número de instituciones es muy grande.

Por ello, por cuestiones de limitación de tiempo y de espacio, y por mi enorme deseo de hacerles patente mi sentir, he decidido expresarle a todos ellos todo mi reconocimiento y mi más profunda gratitud mediante un sencillo esquema.

Primeramente, enunciaré los nombres de las personas a las cuales deseo reconocer y al mismo tiempo les asignaré un número; después representar los apoyos económicos con un triángulo E , los académicos con un pentágono A , los familiares con un cuadrado F y finalmente, los morales con un rectángulo M . Ahora bien, si una persona me brindó apoyo económico, digamos, entonces el número que le corresponde a esta persona será colocado en el triángulo E . Por ejemplo, a los profesores Dr. Luis Montejano Peimbert y Dr. Xavier Gómez-Mont Avalos les corresponden los números de la lista 16 y 8, respectivamente.

Entonces, colocaremos los números 16 y 8 en el conjunto E .

Introducción

La Geometría Convexa o Convexidad Geométrica tiene interesantes ramificaciones e interesantes relaciones con otras áreas de las matemáticas como lo son la Optimización, Análisis Funcional, Cálculo de Variaciones, Teoría de los Números y de la Probabilidad y todas las ramas de la Geometría. Es por ello que economistas, científicos de la computación, cristalógrafos, físicos e ingenieros encuentran en la convexidad herramientas importantes para sus respectivos trabajos.

La Geometría Combinatoria es una importante rama de la convexidad que surgió en este siglo. Sus más importantes líneas de investigación, resultados y métodos fueron desarrollados en las últimas décadas, basadas sobre las contribuciones germinales de O. Helly, K. Borsuk, P. Erdős, H. Hadwiger entre otros extraordinarios matemáticos.

Como es característico en convexidad, en la geometría combinatoria "... algunas preguntas abiertas pueden ser formuladas en términos sencillos, aun por gente que no se dedica a las matemáticas. Sin embargo, las soluciones de estas cuestiones son frecuentemente tan complicadas que toda solución a un problema abierto es un evento mayor ...", según es afirmado en el prefacio de [BMS].

En la década de los sesentas fueron formulados varios interesantes problemas de Geometría Combinatoria, principalmente por L. Fejes Tóth, B. Grünbaum, V. Klee, V.G. Boltianski, [Fe], [Gr], [B1], [B2]. Algunos de estos problemas fueron puntos de partida de teorías completas. Tal es el caso para el *problema de Borsuk* sobre la división de un cuerpo convexo de diámetro d en partes de diámetro menor que d (vea Cap. 5 de [BMS]), la *hipótesis de Gohberg-Hadwiger* sobre el número mínimo de direcciones necesarias para iluminar la frontera de un cuerpo convexo; hoy día, este es un problema abierto, aun para el espacio euclidiano tridimensional (vea Cap. 6 de [BMS]), y, finalmente, problemas relacionados con el clásico resultado de convexidad: *El Teorema de Helly* [S0], [S1], [S2], [B2], [B3], [DGK]. Otro ejemplo de este tipo son los problemas relativos a la investigación de propiedades de puntos

en la frontera de conjuntos convexos, que inmovilizan, con respecto a traslaciones, tales conjuntos. Entre los problemas anteriores se pueden mencionar:

1. La caracterización de sistemas de puntos que inmovilizan, con respecto a traslaciones, conjuntos convexos.
2. La determinación de cotas para las cardinalidades de sistemas de puntos que inmovilizan conjuntos convexos.
3. La caracterización de cuerpos convexos con sistemas inmovilizadores con cardinalidad dada (vea el problema de Fejes Tóth en la secc. 2.1.3 y el problema simétrico de Fejes Tóth en la secc. 2.2.1).

En el presente trabajo se lleva a cabo una exhaustiva investigación de los problemas 1, 2 y 3 anteriores, para lo cual se retoman los principales resultados de L. Fejes Tóth, B. Grünbaum, V.G. Boltianski y H. Martini.

Dada la gran dificultad de los problemas 1, 2 y 3, así como de algunos otros problemas relacionados con estos, nuestras soluciones en algunos casos, son parciales. Sin embargo, estamos muy alentados de que el presente trabajo sea un primer paso hacia la consumación de un "evento mayor" ...

El funcional $md M$ definido sobre la familia \mathfrak{S}^n de los cuerpos convexos (vea 1.1.2) fue introducido por V. G. Boltianski en [B1] con el objeto de efectuar una generalización del Teorema de Helly (Teorema 7) al contexto de una novedosa e interesante variante de la definición de conjunto convexo (vea H -convexidad en 1.3.2).

El funcional $md M$ induce una partición del conjunto \mathfrak{S}^n en n clases las cuales llamaremos clases de Boltianski. Cada *clase de Boltianski* C_k , $k = 1, 2, \dots, n$ está determinada por $C_k = \{M \in \mathfrak{S}^n : md M = k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

El problema de Szökefalvi-Nagy (Problema 10) consiste en la determinación de todos los elementos de cada clase C_k para $k = 1, 2, \dots, n$.

El funcional $md M$ ha resultado ser una herramienta fundamental en la investigación de varios importantes problemas de Geometría Combinatoria. En particular, en el Capítulo 1 se discute el desarrollo de los principales resultados relativos a la solución del Problema 10 y al problema de la generalización del Teorema 7 para conjuntos d -convexos (vea Seccs. 1.3.1 y 1.3.3). La mayoría de los resultados presentados aquí no son demostrados y hemos decidido demostrar aquellos cuyas demostraciones consideramos verdaderamente ilustrativas.

Para realizar la discusión anterior, es necesario definir interesantes subfamilias de politopos y de cuerpos convexos de \mathfrak{S}^n como lo son, por ejemplo, los zonotopos, los belt-politopos, zonoides, etc.

A pesar de que el Capítulo 1 tiene un carácter panorámico, resulta para nosotros de gran importancia, pues nos permite, por un lado, preparar el "escenario" para tener la posibilidad de exponer nuestras contribuciones; ya que aquí se da la definición del cuerpo polar de un cuerpo convexo, la descripción explícita de los cuerpos de Boltianski y Kincses, etc. Por otra parte, nos ofrece un bellissimo ejemplo de como perseguir la solución de un problema geométrico-combinatorio!

En [Fe] se introduce el concepto central de este trabajo: los "sistemas inmovilizadores primitivos" de cuerpos convexos.

Intuitivamente, un conjunto de puntos F en la frontera de un conjunto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema inmovilizador si, suponiendo que son colocados "clavos" fijos en los puntos de F , es imposible trasladar M en alguna dirección.

El sistema inmovilizador es primitivo si toda vez que se quite algún "clavo" de F , el conjunto restante no "fije", con respecto a traslaciones, a M .

Dado que, en general, un cuerpo tiene sistemas inmovilizadores con diferentes cardinalidades, es necesario definir por $\varrho_{\min}(M)$ y $\varrho_{\max}(M)$ la más pequeña y la más grande, respectivamente, de las cardinalidades de los sistemas inmovilizadores primitivos de M .

En el Capítulo 2 se discuten los principales problemas; Problema 60 (de Fejes Tóth), 62 (simétrico de Fejes Tóth), la Conjetura 61 (de Danzer), 64 (de Morales) y 65 (de Boltianski), los principales resultados; los teoremas BM2, ..., BM5 y el contraejemplo a la conjetura de Danzer Secc. 2.2 todos ellos obtenidos por V.G. Boltianski y H. Martini, y los principales métodos; Secc. 2.2.2 y 2.3 que sirven de antecedentes, motivaciones y retos en nuestras investigaciones de los números $\varrho_{\min}(M)$ y $\varrho_{\max}(M)$.

En virtud de la enorme dificultad para determinar $\varrho_{\min}(M)$ y $\varrho_{\max}(M)$ para un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ dado, es necesario investigar el problema, menos difícil, del establecimiento de desigualdades para $\varrho_{\min}(M)$ y $\varrho_{\max}(M)$ escritas en términos de la dimensión n y la clase de Boltianski de M . En el Teorema 72 se da una cota inferior para $\varrho_{\min}(M)$ no conocida hasta ahora. En el Teorema 73 se demuestra, mediante ejemplos, que esta cota inferior junto con la cota superior de Boltianski-Martini (Teorema BM4) son exactas. Sin embargo, no contentos con el hecho de que los cuerpos que figuran en la demostración del Teorema 73 son relativamente sencillos (son descomponibles, i.e., representables en suma vectorial directa), en el Teorema 74 se demuestra, de nuevo con ejemplos, la exactitud de la cota del Teorema

72 y la cota de Boltianski-Martini, pero esta vez los cuerpos que se muestran en la demostración son indescomponibles.

Gracias a la completa descripción que se tiene del conjunto $H(M)$ de los vectores normales en puntos regulares del cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ donde M satisface $\text{md } M = 2$ o M es centralmente simétrico con $\text{md } M = 3$ o $\text{md } M = 4$ (Teoremas 30, 32, 33) y del Teorema BM3, en la Secc. 3.2 se determina el valor de $\varrho_{\min}(M)$ para el caso en que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo de Boltianski o es un cuerpo de Kincses, i.e., $\text{md } M = 2$ o M es centralmente simétrico con $\text{md } M = 3$ o $\text{md } M = 4$ (vea Seccs. 1.2.2 y 1.2.3).

Este hecho nos permite dar una solución, en 3.3, al Problema 60 (de Fejes Tóth) para los casos $\varrho_{\min}(M) = 2n, 2n - 1, 2n - 2$.

En 3.4 se hace una interesante investigación del Problema 62 (simétrico de Fejes Tóth) para el caso $\varrho_{\max}(M) = \infty$.

Por otro lado, en relación a la Conjetura 61 (de Danzer), contrariamente a lo que se esperaba, el dodecaedro rómbico no es el único poliedro de 14 vértices el cual es inmovilizado primitivamente por el conjunto de sus vértices y así lo demostramos en 3.5.

Finalmente, en 3.6 se resuelve el problema de la determinación de estimaciones para las cardinalidades de sistemas inmovilizadores primitivos maximales de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$. Una vez más, tales estimaciones son establecida en términos de la dimensión n y de la clase de Boltianski de M . Para realizar esta tarea se introduce (Secc. 3.6.2), de manera auxiliar, la noción de "cosistema inmovilizador primitivo" de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$. Esta noción es aplicada a los cuerpos polares (vea 1.1.4) de los cuerpos de Boltianski con el propósito de calcular $\varrho_{\max}(M)$ en el caso en que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo de Boltianski. Estos hechos tienen como propósito, básicamente, el dar respuesta a la pregunta:

¿existe un cuerpo de Boltianski $M \subset \mathbb{R}^n$ para el cual se tenga que $\varrho_{\max}(M) = \infty$?

Los Lemas 95 y 96 responden: ¡No!

Varios de los resultados originales de este trabajo fueron obtenidos de manera conjunta con el profesor V.G. Boltianski, director de este trabajo, y por el autor. En algunos casos se encontraron soluciones originales independientes, por ejemplo, el Lema 95. Dada la elegancia de la demostración del Lema 95 del profesor V.G. Boltianski decidimos incluir esta en [BMo2]. Sin embargo, en el presente trabajo exponemos las dos demostraciones. En la Secc. 3.6.1 se expone la del autor la cual hace uso de las ideas de la demostración del Teorema 66. En la Secc. 3.6.2 se expone la del profesor V.G. Boltianski la cual tiene la virtud adicional de que ilustra como demostrar un resultado para un cuerpo convexo en términos de su cuerpo polar.

Capítulo 1

El Funcional md en la Geometría Combinatoria

1.1 Preliminares

1.1.1 Elementos de Convexidad

La mayoría de nuestras consideraciones serán realizadas en el espacio vectorial real de dimensión n : \mathbb{R}^n . Este está equipado con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ derivado de la norma euclidiana. Los elementos de \mathbb{R}^n serán considerados ya sea como puntos; cuando nuestros razonamientos tengan carácter geométrico, o como vectores; cuando sean efectuadas operaciones algebraicas.

Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es llamado *convexo* si este contiene, con cada par p, q de sus puntos, el segmento entero $[p, q] = \{\alpha p + (1 - \alpha)q : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Como ejemplos podemos dar los puntos, segmentos de línea, simplejos, la bola cerrada B^n en \mathbb{R}^n descrita por $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, los conjuntos de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geq \alpha\}$; $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq \alpha\}$ para $y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ fijos. Los conjuntos convexos H^+ , H^- son los *semiespacios cerrados* acotados por el *hiperplano* H . La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se denota por $\text{conv } X$. Claramente, la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo. Por lo tanto, $\text{conv } X$ es un conjunto convexo.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. Vamos a denotar por $\text{dim } M$, $\text{int } M$, $\text{fr } M$, $\text{conv } M$, la dimensión, el interior, la frontera, el casco convexo de M , respectivamente, y si $\text{dim } M < n$, por $\text{rint } M$, $\text{rfr } M$, el interior y la frontera relativos de M , respectiva-

mente. Finalmente, denotaremos por $\text{lin } M$ el espacio lineal generado por M .

Vamos a entender por *cuerpo convexo* un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ que es convexo, compacto, con interior no-vacío, es decir, la dimensión $\text{dim } M$ de M es igual a n .

H es llamado un *hiperplano soporte* de $X \subset \mathbb{R}^n$ en el punto $p \in X$ si $p \in H$, y si, adicionalmente, X está completamente contenido en uno de los semi-espacios determinados por H (Fig. 1).

Un conjunto cerrado $X \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si existe un hiperplano soporte de X a través de cada uno de sus puntos frontera.

El punto x en la frontera $\text{fr } M$ del cuerpo convexo M es un punto *regular* si existe un único hiperplano soporte de M a través de x (Fig. 1).

El conjunto Γ de todos los puntos regulares $x \in \text{fr } M$ es denso en la frontera del cuerpo convexo M , i.e., la cerradura $\text{cerr } \Gamma$ de Γ es igual a $\text{fr } M$.

Para el cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, $H(M)$ denotará el conjunto de todas sus normales exteriores unitarias en sus puntos regulares.

Puesto que en el presente trabajo aparecerán varios conceptos que generalizan a la definición de conjunto convexo nos referimos a la teoría de convexidad, para diferenciarla de las otras, como *convexidad lineal*; respectivamente, *conjunto linealmente convexo*.

Consideremos la intersección C de todos los semi-espacios que contienen a M cuyos hiperplanos frontera pasan a través de x . El conjunto C es llamado el *cono proyección* de M en el punto x ; también se le conoce como el *cono tangente* de M en x . En un punto regular, y sólo en un punto regular, el cono proyección consiste de aquel semi-espacio acotado por el hiperplano soporte en x el cual contiene el cuerpo.

El cono polar convexo del cono proyección en el punto frontera x es obtenido trazando en x las normales unitarias exteriores de todos los hiperplanos soportes de M en x colocadas en los semi-espacios diferentes a aquellos en donde está contenido M . El cono polar del cono proyección de M en p es llamado el *cono normal* de M en p .

La dimensión del cono normal, nos permite dar una clasificación de los puntos frontera de M . Si el cono normal en x tiene dimensión n , entonces x es llamado un *vértice* del cuerpo. Si el cono normal en x tiene dimensión $(n - p)$, entonces x es llamado una *p-cara*.

Todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ tiene a lo más una cantidad infinita numerable de vértices.

Un refinamiento de este resultado, para el caso $n = 3$, fue dado por Fujiwara [Fu] quien demostró que *todo cuerpo tridimensional tiene a lo más una cantidad infinita numerable de caras rectilíneas.*

Los vértices de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ pueden ser densos en todas partes sobre la superficie de M .

La clasificación de los puntos frontera de M se puede dar desde otro punto de vista.

Sea M un conjunto convexo, cerrado. Para $x \in M$, denotemos por F_x el conjunto que contiene a x y a los puntos $y \neq x$ en M para los cuales la línea determinada por x y y contiene un intervalo abierto $I = (a, b)$ con $x \in I \subset M$. Entonces se dice que F_x es la *cara* del punto $x \in M$.

Para $x \in \text{rint } M$ los conjuntos F_x y M coinciden; en este caso $M = F_x$ es una *cara impropia*. Por otro lado, para $x \in \text{rfr } M$, F_x está también contenida en $\text{rfr } M$; en este caso tenemos una *cara propia*.

Para caras propias tenemos dos casos importantes, las situaciones extremas, si F_x no contiene ninguna otra cara, entonces es llamada *cara minimal*. Por otro lado, una cara propia es llamada *maximal*, si no está contenida en ninguna otra cara propia. Se dice que un punto $x \in \text{fr } M$ es un punto *extremo* si $F_x = \{x\}$ (Fig. 1). Denotaremos por $\text{ext } M$ al conjunto de puntos extremos de M .

Si todas las caras maximales de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ son puntos, se dice que M es un cuerpo *estrictamente convexo*. En otras palabras, un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es estrictamente convexo si no contiene intervalos en su frontera.

Si P es un hiperplano soporte de un conjunto convexo, cerrado M , entonces la intersección $P \cap M$ es una cara de M . Cada cara que puede ser representada en tal forma es llamada una *cara expuesta* del conjunto convexo, cerrado M (Fig. 1).

Un punto frontera x de un conjunto convexo, cerrado M es un punto *expuesto*, si $F_x = \{x\}$ (es decir, este punto es un punto extremo) y, más aún, esta cara es expuesta (Fig. 1). El conjunto de puntos expuestos de M será denotado por $\text{exp } M$. Puesto que cada punto expuesto de M es un punto extremo, se cumple la relación $\text{exp } M \subset \text{ext } M$.

Es posible establecer una clasificación para planos soportes dual a la clasificación para los puntos frontera. Un plano soporte es llamado *de contacto débil* si tiene únicamente un punto en común con el cuerpo, de otra manera es llamado *de contacto fuerte*. Los planos soportes de contacto fuerte se dividen en $(n-1)$ clases de acuerdo a la dimensión de sus intersecciones con el cuerpo.

Un poliedro convexo es el casco convexo de un conjunto finito de puntos. Un poliedro convexo tiene solamente un conjunto finito de puntos extremos. Ellos son precisamente los vértices. Recíprocamente, todo cuerpo convexo con conjunto finito de puntos extremos es un poliedro convexo.

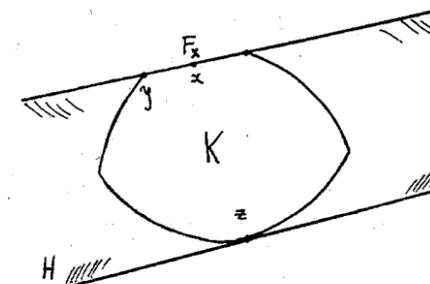


Figura 1:

1.1.2 Definición del Funcional md. Sistemas Globales de Vectores

Describiremos el funcional md M introducido en [B1]. Diremos que los vectores $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ son *mínimamente dependientes* si

(i) Ellos son positivamente dependientes, i.e., existen números positivos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$

(ii) Cada m de los vectores a_0, a_1, \dots, a_m son linealmente independientes.

Para todo conjunto no-vacío $H \subset S^{n-1}$, denotaremos por $\text{md } H$ el más grande de los enteros m tal que existen en H vectores mínimamente dependientes a_0, a_1, \dots, a_m , (si no hay vectores mínimamente dependientes en H , entonces $\text{md } H = 0$). Más aún, para un cuerpo convexo, compacto $M \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\text{md } M$ al número $\text{md } H(M)$, i.e., el más grande de los enteros m tal que existen $m+1$ puntos frontera regulares de M con normales exteriores mínimamente dependientes. Geométricamente, los vectores a_0, a_1, \dots, a_m son mínimamente dependientes si estos son los vértices de un simplejo T de dimensión m que tiene el origen $o \in \mathbb{R}^n$ en su interior relativo.

Diremos que un sistema de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ es *global* si no está contenido en una semiesfera, i.e., si no existe un semiespacio cerrado Π , con hiperplano frontera a través del origen, tal que $H \subset \Pi$. En otros términos, $H \subset \mathbb{R}^n$ es global si para todo $q \neq o$ existen $h_1, h_2 \in H$ tales que $\langle q, h_1 \rangle > 0$ y $\langle q, h_2 \rangle < 0$.

Ejemplo 1 Consideremos dos vectores $p, q \in S^2$, $p \neq q$, en la esfera y sean $C_p =$

$S^2 \cap p_\perp$ y $C_q = S^2 \cap q_\perp$ sus respectivos círculos ortogonales donde p_\perp y q_\perp son los planos ortogonales a p y q , respectivamente. El sistema de vectores $C_p \cup C_q$ es un conjunto global.

Esto se establece de manera sencilla si empleamos la geometría de los círculos máximos de S^2 . Es imposible que $C_p \cup C_q$ esté contenido en una de las semi-esferas determinadas por $C_r = S^2 \cap r_\perp$, $r \in S^2$ (Fig. 2).

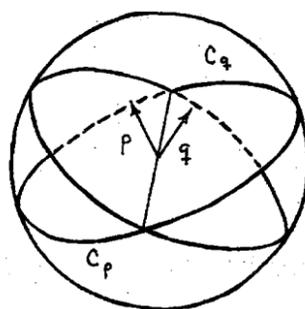


Figura 2:

La intersección de un número finito de semi-espacios cerrados es un poliedro convexo si y sólo si el conjunto de las normales exteriores de estos planos es un conjunto global.

A continuación, veremos un ejemplo interesante que muestra que la determinación de la globalidad de un sistema de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ puede ser un problema no trivial. Para este propósito haremos uso de la existencia de un único elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo dado, la cual fue demostrada en [Za].

Ejemplo 2 (Grünbaum [Gr]). Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo y B es el elipsoide de máximo volumen contenido en K , entonces $F = B \cap \text{fr } K$ es un conjunto global.

Prueba. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que B es la bola unitaria $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Supongamos que el semi-espacio abierto $\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ no contiene ningún punto de F . Consideremos la familia, a un parámetro,

de elipsoides

$$E(\lambda) = \alpha^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \beta^{-2} (x_n - \lambda)^2 \leq 1$$

que tienen en su frontera el punto $(0, 0, \dots, -1)$ y el conjunto

$$\{x : \|x\| = 1, x_n > \frac{1}{n}\}.$$

Entonces $B = E(0)$, y el volumen de B es menor que el volumen de $E(\lambda)$ para $\lambda \neq 0$. El conjunto $\{x \in B : x_n > \frac{1}{n}\}$ está a una distancia positiva de $\text{fr } K$. De aquí se sigue que $E(\lambda) \subset K$ para λ suficientemente pequeña, contradiciendo la maximalidad de B . ■

1.1.3 Las Funciones Distancia $F(x)$ y Soporte $H(u)$ de un Cuerpo Convexo y la Geometría de Minkowski

La Función Distancia de un Cuerpo Convexo.

Sea K es un cuerpo convexo. Supongamos que el origen o del sistema de coordenadas es escogido en el interior de K . Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto arbitrario del espacio diferente de o , y sea $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ el (único) punto de intersección del rayo $o\bar{x}$ con la frontera de K . Por la función distancia $F(x)$ de K entendemos el cociente de las longitudes de ox y $o\xi$,

$$F(x) = \left(\frac{\|x\|}{\|\xi\|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Más aun, establecemos que $F(o) = 0$.

Los puntos que satisfacen la desigualdad

$$F(x) \leq 1$$

son precisamente los puntos de K . $F(x)$ satisface las siguientes propiedades:

- a) $F(x) > 0$ para $x \neq o$, $F(o) = 0$.
- b) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ para $\lambda > 0$.
- c) $F(x + y) \leq F(x) + F(y)$.

Por lo tanto, $F(x)$ es una función convexa.

Recíprocamente, supongamos que $F(x)$ es una función que tiene la propiedad de satisfacer las propiedades a), b) y c). Entonces los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad

$$F(x) \leq 1$$

determinan un cuerpo convexo con el origen en su interior y cuya función distancia es $F(x)$.

La Geometría de Minkowski

Si un cuerpo convexo que contiene a o como su centro es dado, entonces una distancia puede ser asignada a cada par de puntos x, y mediante la relación

$$d(x, y) = F(x - y),$$

en donde $F(x)$ es la función distancia al cuerpo. Este concepto de distancia tiene las propiedades que son usualmente requeridas:

$$d(x, y) > 0 \text{ para } x \neq y, \quad d(x, x) = 0$$

y satisface la "desigualdad el triángulo"

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Las cuales se siguen inmediatamente de las propiedades a), b), c) de la función distancia. La superficie frontera del cuerpo convexo es llamada la superficie estándar de la métrica. Esta juega el papel de la esfera unitaria de la geometría Euclidiana. La función distancia es también simétrica,

$$d(x, y) = d(y, x)$$

si y sólo si el cuerpo tiene a o como centro. Esto es, si y sólo si $F(x) = F(-x)$.

Esta métrica fue introducida en [Mi] por Minkowski para realizar algunas investigaciones en la Teoría de Números.

La Función Soporte de un Cuerpo Convexo

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo y u es un punto arbitrario diferente del origen, entonces existe exactamente un hiperplano soporte orientado P de K en la dirección u tal que el semi-espacio positivo de P (en el cual u indica la dirección positiva) es disjunto de K . La ecuación de este plano puede ser escrita en la forma

$$\langle x, u \rangle = H(u).$$

$H(u)$ es llamada la función soporte de K .

Para todos los puntos x del cuerpo, la desigualdad

$$\langle x, u \rangle \leq H(u) \tag{1.1}$$

se satisface, y la igualdad se tiene para algunos de sus puntos. $H(u)$ puede ser definida también como el máximo de $\langle x, u \rangle$ donde x varia sobre todos los puntos de K . Recíprocamente, cada punto x que satisface todas las desigualdades (1.1) es un punto de K .

En particular, si $|u| = 1$ entonces H representa la distancia del plano soporte al origen. Esta distancia es considerada positiva si K y el origen están sobre el mismo lado del plano soporte, y negativa si K y el origen están separados por el plano soporte. H es cero si el origen está en el plano soporte.

La función $H(u)$ tiene las siguientes propiedades ([B-F] secc. 15):

A) $H(o) = 0$.

B) $H(\lambda u) = \lambda H(u)$ para $\lambda > 0$.

C) $H(u + v) \leq H(u) + H(v)$.

También en [B-F] secc. 15 es demostrado que:

Toda función $H(u)$ definida para toda $u \in \mathbb{R}^n$ y que satisface las propiedades A), B), C) es la función soporte de un cuerpo convexo.

1.1.4 Dualidad Polar en Convexidad

Denotemos por E al espacio vectorial real de dimensión n , \mathbb{R}^n , i.e., $E = \mathbb{R}^n$. Una función $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una *funcional lineal* sobre E si satisface

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in E$. El conjunto de todas las funcionales lineales definidas sobre E es denotado por E^* . Con las operaciones usuales

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), (\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

el conjunto E^* es un espacio vectorial de dimensión n y, por lo tanto, es isomorfo a E . Este espacio vectorial E^* es el espacio *conjugado* de E .

Puesto que $E = \mathbb{R}^n$, es bien sabido que cada vector $y \in E$ puede ser considerado como una funcional lineal sobre E , i.e., $y(x) = \langle x, y \rangle$ y, recíprocamente, toda funcional lineal $f \in E^*$ puede ser expresada en la forma $f(x) = \langle x, y \rangle$ para alguna (y sólo una) $y \in E$. En este caso el espacio conjugado E^* coincide con E , i.e., E es un espacio auto-conjugado.

A continuación, trasladaremos varios conceptos de cuerpos convexos al lenguaje de espacios conjugados. Esta correspondencia 1-1 entre estas nociones es llamada *polaridad* o *dualidad*.

Sea $f \in E^*$ una funcional lineal no cero definido sobre E . Denotemos por f^* el conjunto $\{x \in E : f(x) = \langle x, y \rangle = 1\}$. Este conjunto es un hiperplano en E que no contiene al punto $o \in E$. Recíprocamente, para todo hiperplano $L \subset E$ que no pasa a través de o existe un único punto $f \in E^*$ tal que $f^* = L$. Por lo tanto, obtenemos una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los hiperplanos en E , que no pasan a través de o , y el conjunto de todos los puntos de E^* excepto o .

Por otra parte, sea x un punto de E distinto de o . Denotemos por x^* el conjunto $\{f \in E^* : f(x) = 1\} = \{f \in E^* : \langle x, y \rangle = 1\}$. Este conjunto x^* es un hiperplano en E^* que no contiene al punto $o \in E$. De nuevo, obtenemos una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los puntos de E distintos de o y el conjunto de todos los hiperplanos de E^* que no pasan a través de o .

El Cuerpo Polar. Si K es un cuerpo convexo (con puntos interiores) y el origen pertenece a su interior, entonces la función soporte $H(u)$ de K es positiva para toda $u \neq 0$. Esta tiene entonces las propiedades a), b), c) que caracterizan la función distancia [vea el principio de esta sección]. Por lo tanto, en este caso, H puede ser pensada como la función distancia de un cuerpo convexo K^* . Este consiste de los puntos que satisfacen la desigualdad

$$H(u) \leq 1.$$

K^* es llamado el cuerpo *polar* de K .

Esta descripción se puede hacer de una forma más explícita introduciendo el espacio conjugado.

Sea K un cuerpo convexo que tiene al origen o como uno de sus puntos interiores. El cuerpo polar de K es definido como el conjunto

$$K^* = \{y \in E^* : y(x) \leq 1 \text{ para todo } x \in K\}$$

no es difícil ver que K^* es convexo.

Es en esta forma con la que nosotros trabajaremos con los cuerpos polares, debido al mayor carácter geométrico que funcional de esta descripción (Lemas 89, 75 y Teorema 67). Usando esta perspectiva fueron obtenidos interesantes resultados en [B3] y [Ki] relativos a la solución del problema de Szökefalvi-Nagy. Algunos trabajos en donde se resuelven interesantes problemas de Geometría Combinatoria traduciendo tales problemas al lenguaje de cuerpos polares son [Be],[Ba1],[B-Mo2].

Cabe mencionar que la descripción funcional del cuerpo polar tiene múltiples aplicaciones y existe un gran número de resultados en esta dirección, sin embargo, nosotros no abordaremos estos hechos. Remitimos al lector interesado al excelente libro [S].

Teorema 3 Para todo $f \in E^*$ no cero, el hiperplano f^* es un hiperplano soporte del cuerpo M si y sólo si f es un punto frontera de M^* .

Teorema 4 Para todo punto $f \in E^*$ no cero el hiperplano f^* es un hiperplano soporte regular del cuerpo M si y sólo si f es un punto frontera expuesto de M^* .

Ahora pasemos a la teoría de conjuntos convexos. Sea $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ una descomposición en suma vectorial directa para el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^n$. Supongamos que para todo $q = 1, \dots, s$ es dado el conjunto convexo $M_q \subset E_q$. El conjunto de todos los puntos $x = x_1 + \dots + x_s$, donde $x_1 \in M_1, \dots, x_s \in M_s$ es llamada la *suma vectorial directa* de los conjuntos M_1, \dots, M_s y es denotada por $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$. Es fácil ver que $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ es convexo en E . Si cada M_i es cerrado (compacto), entonces $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ también es cerrado (compacto). Si cada M_q es un cuerpo convexo en E_q (con el origen en su interior), entonces también $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ es un cuerpo convexo en E (con el origen en su interior). Un cuerpo convexo $M \subset E$ es llamado *descomponible*, si existe una descomposición en suma vectorial directa $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ con $s \geq 2$ y $\dim E_q \geq 1$ para cada $q \in \{1, \dots, s\}$, tal que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, donde cada M_q es un cuerpo convexo en E_q .

Consideremos cuerpos convexos $M_q \subset E_q$, $q = 1, \dots, s$, donde cada uno de los cuales contiene al origen en su interior. El cuerpo convexo $\text{conv}(M_1 \cup \dots \cup M_s)$ es llamado la *unión directa* de los cuerpos M_1, \dots, M_s y denotado por $M_1 \vee \dots \vee M_s$.

Esta unión es de nuevo un cuerpo convexo en E con el origen como uno de sus puntos interiores. Un cuerpo convexo $M \subset E$ es llamado *divisible*, si existe una descomposición en suma vectorial directa $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ con $s \geq 2$ y $\dim E_q \geq 1$ para todo q , tal que $M = M_1 \vee \cdots \vee M_s$, donde, de nuevo, cada M_q es un cuerpo convexo en E_q con el origen en su interior para cada $q = 1, \dots, s$.

Teorema 5 Sea $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$, y sea M_q un cuerpo convexo en el espacio E_q con el origen en su interior para cada $q = 1, \dots, s$. Entonces

$$\begin{aligned} (M_1 \oplus \cdots \oplus M_s)^* &= M_1^* \vee \cdots \vee M_s^*, \\ (M_1 \vee \cdots \vee M_s)^* &= M_1^* \oplus \cdots \oplus M_s^*, \end{aligned}$$

donde M_q^* es el cuerpo polar de M_q en el subespacio E_q , $q = 1, \dots, s$.

Corolario 6 Sea $M \subset E$ un cuerpo convexo con el origen como uno de sus puntos interiores. El cuerpo M es descomponible si y sólo si M^* es divisible.

1.2 El Problema de Szökefalvi-Nagy

1.2.1 Historia del Problema

Primeramente, enunciemos el famoso teorema de convexidad: El Teorema de Helly.

Teorema 7 (de Helly) Sean M_1, \dots, M_s conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , $s \geq n + 2$. Si cada $n + 1$ de estos conjuntos tiene intersección no vacía, entonces

$$M_1 \cap \cdots \cap M_s \neq \emptyset.$$

Un hecho notable es que el Teorema de Helly es equivalente al siguiente Teorema de Carathéodory [DGK].

Teorema 8 (de Carathéodory) Cuando $X \subset \mathbb{R}^n$, para cada punto y de $\text{conv}(X)$ existe un conjunto de s puntos x_1, \dots, x_s , todos elementos de X , con $s \leq n + 1$ tal que y es un punto del simplejo cuyos vértices son los x_1, \dots, x_s .

Sea F una familia de conjuntos en \mathbb{R}^n . La *dimensión de Helly*, $\text{him } F$, de la familia F es el entero m más pequeño tal que la familia F posee la siguiente propiedad: si para toda colección de conjuntos $M_1, \dots, M_s \in F$ con $s > m + 1$, cada $m + 1$ de ellos tiene intersección no-vacía, entonces $M_1 \cap \cdots \cap M_s \neq \emptyset$. El Teorema

clásico de Helly establece que la familia de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n tiene dimensión de Helly igual a n .

A continuación, expondremos los principales resultados acerca de la determinación de la dimensión de Helly de la familia $T(M)$, donde $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo y $T(M)$ consiste de todos sus trasladados. Para simplificar la notación denotemos por $\text{him } M$ a $\text{him } T(M)$. Es fácil ver que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un paralelotopo, $\text{him } M = 1$. En otros términos, si M_1, \dots, M_s son trasladados de un paralelotopo M tal que cada par de aquellos tiene intersección no-vacía, entonces la intersección de todos aquellos es no-vacía, i.e., $M_1 \cap \cdots \cap M_s \neq \emptyset$. El famoso matemático húngaro B. Szökefalvi-Nagy probó que el recíproco del resultado anterior es cierto [Sz].

Teorema 9 (de Szökefalvi-Nagy) Si un cuerpo convexo, compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ satisface la condición $\text{him } M = 1$, entonces M es un paralelotopo.

Este interesante resultado dió lugar a la formulación del siguiente (difícil) problema de Geometría Combinatoria conocido como el *problema de Szökefalvi-Nagy*:

Problema 10 Encontrar todos los cuerpos convexos, compactos $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{him } M = r$, donde $r = 2, \dots, n$.

Observemos que, en virtud de los Teoremas 7 y 9, este problema únicamente tiene sentido para aquellos enteros r tales que $2 \leq r \leq n$.

La "solución algebraica" del problema 10 fue dada por V. Boltianski [B1].

Teorema 11 Para cada cuerpo convexo, compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ se satisface que $\text{him } M = \text{md } M$.

V. Boltianski ofrece una completa investigación del caso $\text{md } M = 2$ para cuerpos centralmente simétricos [B2].

Teorema 12 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, compacto, centralmente simétrico. La desigualdad $\text{him } M \leq 2$ es verdadera si y sólo si M es suma vectorial directa de conjuntos convexos, cada uno de los cuales tiene dimensión ≤ 2 , i.e., $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$, donde $\dim M_i \leq 2$.

Este teorema es una generalización directa del Teorema 9. De hecho, el Teorema 9 puede ser formulado de la manera siguiente: La igualdad $\text{him } M = 1$ se satisface si y sólo si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$ con $\dim M_i = 1$ para toda i .

En la siguiente sección veremos, casi completamente, como es que V. G. Boltianski, haciendo uso del Teorema 11, resuelve, también, el Problema de Sz-Nagy para el caso $r = 2$, es decir, clasifica los cuerpos convexos, indescomponibles $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{him } M = 2$, i.e., clasifica los cuerpos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$ indescomponibles para los cuales $\text{md } M = 2$.

Una parte del Teorema 12 tiene una completa generalización. De manera más precisa, si M es suma vectorial directa de conjuntos convexos, cada uno de los cuales con dimensión $\leq r$, entonces la desigualdad $\text{him } M \leq r$ es cierta. Este resultado se obtiene como corolario del siguiente teorema [BMS1]:

Teorema 13 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo que tiene la representación: $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, donde para cada $q \in \{1, \dots, s\}$, el conjunto convexo M_q es un cuerpo en su casco afín y, por lo tanto, es posible denotar su dimensión de Helly por $\text{him } M_q$ (en $\text{lin } M_q$), $q = 1, \dots, s$. En esta situación, la siguiente igualdad se cumple:

$$\text{him } M = \max(\text{him } M_1, \dots, \text{him } M_s)$$

Ahora la pregunta natural es: ¿Cuándo es cierta la otra parte del Teorema 12 para $2 \leq r \leq n$? Expongamos esta duda de una forma más precisa.

Pregunta 14 ¿Es verdad que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo tal que $\text{him } M \leq r$, $2 \leq r \leq n$, entonces $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$, donde $M_i \subset L_i$, $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, y la dimensión de L_i no excede r ?

En el caso general, esta pregunta tiene respuesta negativa. En [B2] se dan ejemplos, los cuales ilustran, por un lado, que la hipótesis de simetría central de M es imprescindible para $r = 2$ y que, por otra parte, la pregunta 14 tiene respuesta negativa para el caso $r \geq 3$ aún cuando M es supuesto centralmente simétrico.

Veamos en detalle el ejemplo de V. Boltianski para el caso $r = 2$.

Ejemplo 15 La hipótesis de simetría central en el Teorema 12 es imprescindible.

Prueba. En efecto, en \mathbb{R}^3 , con un sistema coordenado rectangular (x_1, x_2, x_3) , consideramos el poliedro M (un stack) determinado por las desigualdades

$$x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 1$$

Puesto que M es una pirámide cuya base es un cuadrado, M es indescomponible en suma vectorial directa. Por otro lado, no es difícil ver que $\text{md } M = 2$ y, por

el Teorema 11, $\text{him } M = 2$ y, sin embargo, M no está representado como suma vectorial directa $M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ de cuerpos convexos M_i con la propiedad de que $\text{dim } M_i \leq 2$. ■

Antes de continuar, introduzcamos dos clases importantes de politopos.

Diremos que un conjunto $Z \subset \mathbb{R}^n$ es un *zonotopo* si es la suma vectorial (en general, no directa) de un número finito de segmentos. Como un ejemplo de zonotopo, en la Fig. 3 se muestra el dodecahedro rómbico el cual es la suma vectorial directa de cuatro segmentos en posición general.

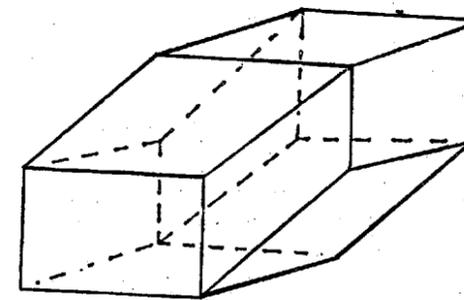


Figura 3:

Se dice que un politopo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un *belt politopo* si para cada cara F de M de dimensión dos y para cada arista $P \subset F$ existe otra arista $P_1 \subset F$ la cual es paralela a P .

A pesar de los resultados negativos, observados anteriormente, la pregunta 14 no siempre tiene respuesta negativa. De manera más precisa, si se considera que el cuerpo M sea elemento de una familia Φ de cuerpos convexos con alguna propiedad especial X , entonces se puede concluir que la pregunta tiene respuesta positiva. El problema ahora es determinar para cuales propiedades X se tiene esta situación.

En [Ba1] E. Baladze demuestra que si la propiedad X es:

- i) ser un zonotopo, o
- ii) ser un belt politopo,

la respuesta a la pregunta 14 es positiva. De manera precisa, los resultados de Baladze son:

Teorema 16 Sea $Z \subset \mathbb{R}^n$ un zonotopo. La desigualdad $\text{him } Z \leq r$ es cierta si y sólo si Z es suma vectorial de zonotopos donde cada uno de los cuales es de dimensión $\leq r$.

Teorema 17 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un belt politopo de dimensión n . Entonces, $\text{him } M \leq r$ si y sólo si M es una suma vectorial de politopos y cada uno de los cuales tiene dimensión $\leq r$.

La idea central en la demostración del Teorema 16 es el hecho de que los zonotopos $Z \subset \mathbb{R}^n$ indescomponibles son Helly-maximales, es decir, $\text{him } Z = \dim Z$. En términos más precisos, en [Ba1] se establece el siguiente teorema:

Teorema 18 Sea $Z \subset \mathbb{R}^n$ un zonotopo indescomponible en suma vectorial directa de conjuntos convexos de menor dimensión, entonces $\text{md } Z = \dim Z$.

Ahora describiremos dos familias más de cuerpos convexos: los zonoides y los belt cuerpos, para los cuales la respuesta a la pregunta 14 también es positiva. El primer resultado fué demostrado por Baladze en [Ba2] y el segundo por V. Boltianski y H. Martini en [B-Ma1] en donde fue introducido por vez primera el concepto de belt cuerpo.

Sea \mathfrak{S}^n la familia de todos los cuerpos convexos en \mathbb{R}^n . La métrica de Hausdorff para los elementos de \mathfrak{S}^n se define como

$$\rho(M, N) = \max \left\{ \sup_{x \in M} \inf_{y \in N} |x - y|, \sup_{y \in N} \inf_{x \in M} |x - y| \right\}$$

Diremos que $N \subset \mathbb{R}^n$ es un zonoide si existe una familia $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}^n$ de zonotopos tales que $\rho(Z_n, N) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Observación 19 La familia de los zonoides no es densa ni siquiera en el conjunto de los cuerpos centralmente simétricos [S].

Teorema 20 Para un zonoide $M \subset \mathbb{R}^n$ la igualdad $\text{him } M = \text{md } M = r$ se satisface si y sólo si M puede ser representado como una suma vectorial directa de conjuntos de dimensión $\leq r$, pero no como una suma vectorial directa de conjuntos de dimensión $\leq r - 1$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, m una línea soporte de M , y $a \in m \cap M$. Decimos que m es una *semi-tangente* para M si al menos uno de los rayos definidos sobre m por el punto a es un rayo tangencial para M , i.e., está contenido en el cono soporte de M en a .

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y l una línea. Decimos que l tiene una *dirección belt* con respecto a M si toda línea soporte m de M paralela a l es una semi-tangente de M .

Un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un *belt cuerpo* si para cada vector $v \in H(M)$ y para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario existen $n - 1$ belt vectores linealmente independientes a_1, \dots, a_{n-1} del cuerpo M tales que el hiperplano generado por ellos tiene normal unitaria p que satisface $\|v - p\| < \varepsilon$.

Ejemplo 21 Todo belt politopo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un belt cuerpo.

Prueba. En efecto, sea $v \in H(M)$. La hipercara N de M cuyo vector normal es v , es un politopo de dimensión $n - 1$. Por un lado, el número de aristas (subespacios afines de dimensión 1 que conectan vértices de N intersección la frontera de M) de N es mayor que $n - 1$ y, por otro lado, cada arista de N determina una belt dirección con respecto a N , en virtud de la definición de belt politopo. Por lo tanto, es posible encontrar $n - 1$ belt vectores linealmente independientes del cuerpo N ortogonales a v . Luego, M es un belt cuerpo. ■

Ejemplo 22 Sea C un cono circular recto, i.e., $C = \text{conv}(A \cup \{x\})$ con $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ y $x = (0, 0, 1)$, entonces $M = \text{conv}(C \cup -C)$ no es un belt cuerpo (Fig. 4)

Prueba. Si la dirección determinada por el vector $u \in S^2$ ilumina al punto x o a $-x$, entonces la shadow boundary $\xi(u)$ es igual a A y, por lo tanto, ninguna de las líneas soportes de M en los puntos de A es una semi-tangente. Luego, ninguna de estas direcciones es una belt dirección con respecto a M . Por otro lado, en el caso contrario, i.e., $u \in S^2$ es tal que la dirección determinada por u no ilumina al punto x o a $-x$, entonces $\xi(u)$ contiene a x o a $-x$ y, por lo tanto, la línea soporte de M paralela a u por x o por $-x$, no es una semi-tangente para M . Luego, u no es una belt dirección con respecto a M . En resumen, no existen belt direcciones con respecto a M y, por lo tanto, M no es un belt cuerpo. ■

A diferencia de los zonoides la familia de los belt cuerpos es densa en el conjunto de todos los cuerpos convexos.

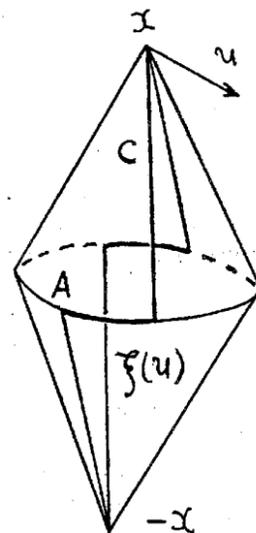


Figura 4:

Teorema 23 La familia de los belt cuerpos es densa en \mathfrak{S}^n .

La demostración de este resultado se sigue del Ejemplo 21 y del Teorema 41.1 de [BMS1]:

Teorema 24 Todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ puede ser representado como un límite de una sucesión convergente de belt politopos.

En [B-Ma1] se extiende el Teorema 17, el Teorema 26 abajo, para la familia de belt cuerpos. Para verificar que, efectivamente, se trata de una generalización basta observar el Teorema 23, la Observación 19 y el siguiente resultado, demostrado en [BMS1]:

Teorema 25 Todo zonoide $Z \subset \mathbb{R}^n$ es un belt cuerpo.

El siguiente teorema es, por tanto, uno de los resultados más importantes, al día de hoy, en la solución al problema de Sz-Nagy.

Teorema 26 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un belt cuerpo. La desigualdad $\text{him } M \leq r$, $1 \leq r \leq n$, se cumple si y sólo si M es representable en la siguiente forma:

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s, \quad \text{dim } M_i \leq r, \quad i = 1, \dots, s$$

En otras palabras, si un belt cuerpo convexo es representable como una suma vectorial directa de conjuntos convexos M_1, \dots, M_s , cada uno de los cuales es indescomponible, entonces

$$\text{him } M = \max(\text{him } M_1, \dots, \text{him } M_s)$$

1.2.2 Cuerpos de Boltianski

En este apartado presentaremos los Cuerpos de Boltianski los cuales están caracterizados por tener su dimensión de Helly igual a 2, es decir, los Cuerpos de Boltianski son aquellos cuerpos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{him } M = 2$, i.e., $\text{md } M = 2$. Por lo tanto, los Cuerpos de Boltianski, los cuales fueron introducidos para $n = 3$ en [B-Ch] y el caso general en [B3], son la solución al problema de Sz-Nagy para el caso $r = 2$.

En [BMS1, pag. 166] se plantea la siguiente estrategia para resolver el problema de Sz-Nagy para toda r :

- (i) Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de vectores satisfaga la condición $\text{md } H = r$.
- (ii) Describir todos los cuerpos $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales el sistema de vectores $H(M)$ satisfaga las condiciones encontradas en (i).

En [B3] se lleva a cabo, de manera por demás elegante, la estrategia anterior para resolver el caso $r = 2$.

Puesto que nosotros realizamos varias investigaciones de los Cuerpos de Boltianski, precisamos de una completa descripción de estos y de los sistemas de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\text{md } H = 2$. Para tal objetivo es necesario establecer las principales definiciones y resultados de [B3].

Un sistema de vectores $H \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un *2-sistema* si éste es global y satisface $\text{md } H = 2$. Además se dice que es *no-divisible*, si no existe una descomposición en suma vectorial directa $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$, $s > 1$, con $\text{dim } L_i > 0$, $i = 1, \dots, s$ y $H \subset L_1 \cup \cdots \cup L_s$. Un vector $e \in H$ es llamado *particular* si éste no puede ser representado como una combinación lineal positiva de elementos de $H - \{e\}$.

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un sistema de vectores diferentes de cero. Denotaremos por $\text{norm } Q$ el conjunto de todos los vectores normalizados de Q , es decir, $y \in \text{norm } Q$ si y sólo si existe $x \in Q$ tal que $y = \frac{x}{\|x\|}$.

Sea k un entero con $1 < k < n$, y sea $\varphi : \{k+1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ un mapeo que es sobre para $k=2$ y sea e_1, \dots, e_n una base para \mathbb{R}^n . Para $i < j$ definimos los siguientes subconjuntos bidimensionales

$$F_{i,j} = \{v : v = x_i e_i + x_j e_j, x_i \leq 0, x_j \leq 0\}, \quad \Pi_{i,j} = \{v : v = x_i e_i + x_j e_j, x_i \leq 0\}.$$

Consideremos los sistemas de vectores

$$H_{(1)} = \{e_1\} \cup \left(\bigcup_{1 < j \leq n} \Pi_{1,j} \right),$$

$$H_{(k)} = \{e_1, \dots, e_k\} \cup \left(\bigcup_{i < j \leq k} F_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{k < j \leq n} \Pi_{\varphi(j),j} \right) \quad \text{para } 1 < k < n,$$

$$H_{(n)} = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \left(\bigcup_{i < j \leq n} F_{i,j} \right)$$

Finalmente, sea e_1, e_2, e_3, e_4 una base en \mathbb{R}^4 . Consideremos el sistema de vectores

$$H_{(0)} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1 - e_2, -e_1 - e_3, -e_2 - e_4, -e_3 - e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}.$$

En [B3] los siguientes teoremas son establecidos

Teorema 27 Sea $H \subset S^{n-1}$ un 2-sistema no-divisible, con $n \geq 3$. Si H no contiene un vector particular, entonces $n=4$, y en una base e_1, e_2, e_3, e_4 de \mathbb{R}^4 el sistema H coincide con

$$H_{(0)} = \text{norm}\{e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1 - e_2, -e_1 - e_3, -e_2 - e_4, -e_3 - e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}.$$

Teorema 28 Sea $H \subset S^{n-1}$ un 2-sistema no-divisible que contiene al menos un vector particular, donde $n \geq 3$. Existe un número $k, 1 \leq k \leq n$, y vectores particulares linealmente independientes e_1, \dots, e_k de H tales que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

$$H \subset H_{(n)} \quad (1.2)$$

para $k=n$. Más aún, sea $k < n$. Entonces existen vectores e_{k+1}, \dots, e_n y un mapeo

$$\varphi : \{k+1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\},$$

tal que e_1, \dots, e_n es una base en \mathbb{R}^n (no necesariamente ortonormal) y las siguientes relaciones se cumplen:

$$H \subset H_{(1)} \quad (1.3)$$

para $k=1$,

$$H \subset H_{(2)} \quad (1.4)$$

para $k=2$ donde el mapeo es sobre,

$$H \subset H_{(k)} \quad (1.5)$$

para $1 < k < n$. Además el lado derecho en las relaciones (1.2), ..., (1.5), representan 2-sistemas maximales contenidos en S^{n-1} , i.e., todo vector adicional hace que cada uno de esos sistemas de vectores tenga un valor de md más grande que 2.

Teorema 29 Un cuerpo convexo, indescomponible $M \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, satisface la condición $\text{md } M = 2$ si y sólo si existe una base e_1, \dots, e_n para \mathbb{R}^n de tal manera que ya sea que $H(M) \subset \text{norm } H_{(s)}$ para algún índice $s=1, \dots, n$ o $n=4$ y $H(M) = \text{norm } H_{(0)}$.

En el teorema siguiente, haciendo uso del Teorema 28, Boltianski caracteriza los cuerpos convexos indescomponibles $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{md } M \leq 2$ en términos del cuerpo polar M^* . Esto es un resultado auxiliar hacia la descripción final de los cuerpos 2 Helly-dimensionales.

Teorema 30 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo; $n \geq 3$. Supongamos que $o \in \text{int } M$ y M es indescomponible. La desigualdad $\text{md } M \leq 2$ se satisface en y sólo en los siguientes casos:

- A) Existe una base e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n y conjuntos convexos bidimensionales cerrados B_{ij} ($i < j < n$), tales que
- i) $B_{ij} \subset \text{lin}(e_i, e_j)$ y $\text{ext } B_{ij} \subset \{e_i, e_j\} \cup F_{ij}$,

ii) $M^* = \text{conv}(\bigcup_{i < j \leq n} B_{ij})$.

B) Existe una base e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n y conjuntos convexos bidimensionales, cerrados C_2, \dots, C_n tales que

- i) $C_l \subset \text{lin}(e_1, e_l)$ y $\text{ext } C_l \subset \{e_1\} \cup \Pi_{1,l}$ para $l = 1, \dots, n$,
- ii) $M^* = \text{conv}(C_2, \dots, C_l)$.

C) Existe una base e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n , un entero k ($2 \leq k < n$), un mapeo $\varphi : \{k+1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ (este es sobre en el caso $k=2$), y conjuntos convexos bidimensionales, cerrados B_{ij}, C_l ($i < j \leq k; l > k$), tales que

- i) $B_{ij} \subset \text{lin}(e_1, e_j)$ y $\text{ext } B_{ij} \subset \{e_i, e_j\} \cup F_{ij}$,
- ii) $C_l \subset \text{lin}(e_l, e_{\varphi(l)})$ y $\text{ext } C_l \subset \{e_{\varphi(l)}\} \cup \Pi_{\varphi(l),l}$,
- iii) $M^* \subset \text{conv}((\bigcup_{i < j \leq k} B_{ij}) \cup (C_{k+1} \cup \dots \cup C_l))$.

D) $n=4$ y existe una base e_1, e_2, e_3, e_4 en \mathbb{R}^4 , tal que $H(M) = H(o)$ (vea el Teorema 27).

Por conveniencia, escribimos $\text{ind } M = s$ si M es un cuerpo convexo, tal que $\text{md } M = 2$ and $H(M) \subset \text{norm } H(s)$. Es conveniente dar una descripción geométrica de los cuerpos convexos, $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{ind } M = s$. Haremos esto de manera detallada para el caso $\text{ind } M = 1$ en el Teorema 31.

Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un paralelotopo, y sea Π una cara de dimensión $(n-1)$ de W . Un cuerpo convexo, compacto M que satisface la inclusión $\Pi \subset M \subset W$ se dice que es un *stack* con base Π , si para cada hiperplano L paralelo a Π y que pasa a través de un punto interior de M la intersección $L \cap M$ es un paralelotopo de dimensión $(n-1)$ cuyas caras son correspondientemente paralelas a las caras de Π (Fig. 5).

Existe otra descripción de stacks. Sea e_1, \dots, e_n una base de \mathbb{R}^n . Para $i < j$, denotemos por $P_{i,j}$ el plano bidimensional $\{x : x = x_i e_i + x_j e_j\}$ y por $L_{i,j} \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio de dimensión $(n-2)$ generado por todos los e_1, \dots, e_n excepto e_i, e_j . Más aún, sea $G_{1,i}$ un conjunto convexo, compacto bidimensional contenido en $P_{1,i}$ tal que el segmento $[e_i, -e_i]$ está contenido en la frontera relativa de $G_{1,i}$, y no existe un segmento en $G_{1,i}$ el cual es paralelo al eje i -ésimo con longitud $\geq 2|e_i|$. Entonces

$$M_{(1)} = \bigcap_{1 < j \leq n} (G_{1,j} \oplus L_{1,j}), \tag{1.6}$$

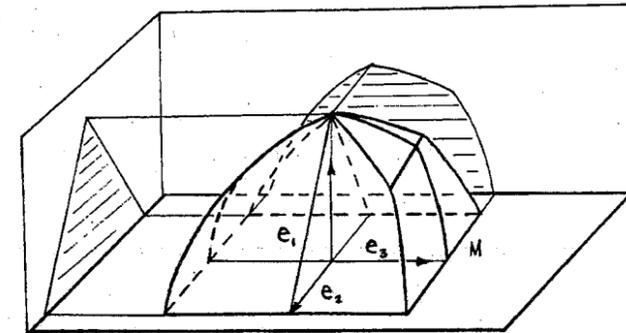


Figura 5:

Para $i < j$, sea $Q_{i,j} \subset P_{i,j}$ un cuerpo convexo tal que $o, e_i, e_j \in Q_{i,j}$ y no existe un segmento en $Q_{i,j}$ el cual es paralelo al i -ésimo o al j -ésimo eje y tiene longitud $\geq |e_i|$ (correspondientemente, $\geq |e_j|$). Finalmente, sea $G_{i,j}$ un conjunto convexo, compacto bidimensional contenido en $P_{i,j}$ tal que el segmento $[e_j, -e_j]$ está contenido en la frontera relativa de $G_{i,j}$ y no existe un segmento en $G_{i,j}$ el cual es paralelo al eje j -ésimo con longitud $\geq 2|e_j|$.

$$M_{(n)} = \bigcap_{i < j \leq n} (Q_{i,j} \oplus L_{i,j}).$$

$$M_{(k)} = \left(\bigcap_{i < j \leq k} (Q_{i,j} \oplus L_{i,j}) \right) \cap \left(\bigcap_{k < j \leq n} (G_{\varphi(j),j} \oplus L_{\varphi(j),j}) \right) \text{ para } 1 < k < n.$$

En [B3] es demostrado que $M_{(s)}$ satisface las condiciones $\text{md } M = 2$, $\text{ind } M = s$ y todo cuerpo $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{md } M = 2$, $\text{ind } M = s$ puede ser representado (salvo traslación) en tal forma.

Para dar una idea del tipo de razonamientos con los cuales se trabaja en [B3] y de como se trabajará en el presente manuscrito, ofrecemos la demostración original de V. Boltianski de la afirmación anterior, en el siguiente teorema, donde en la última parte de la prueba se agregó una pequeña parte faltante.

Teorema 31 *Un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un stack si y sólo si satisface la condición (B) en el Teorema 30.*

Prueba. Sea M un stack (con el origen en su interior). Denotemos por e_1 la normal exterior unitaria de la cara $\Pi \subset M$, y las normales exteriores unitarias de las caras de W (con un vértice común $q \in \Pi$) por e_2, \dots, e_n . Sea $a \notin \Pi$ un punto frontera regular de M . Denotemos por P el semi-espacio soporte de M en el punto a , por Γ su hiperplano frontera, y por v la normal unitaria de P . Primeramente, consideremos el caso cuando Γ no es paralelo a Π . Entonces la intersección $L \cap M$ es un $(n-1)$ -paralelotopo cuyas caras son correspondientemente paralelas a las caras de Π . Puesto que a es un punto frontera regular de M , hay una cara Δ de dimensión $(n-2)$ del paralelotopo $L \cap M$ tal que $a \in \text{rint } \Delta$. Por lo tanto, existe un índice $l \in \{2, \dots, n\}$ tal que los vectores e_1 y e_l son ortogonales a $\text{lin } \Delta$. El vector v es también ortogonal a $\text{lin } \Delta$ (puesto que $\Delta \subset \Gamma$) y, por lo tanto, los vectores v, e_1, e_l son linealmente dependientes, i.e., $v = x_1 e_1 + x_2 e_l$. Más aun, el coeficiente x_1 es no-positivo, puesto que el semi-espacio P contiene la base Π (en la Fig. 6 tenemos la proyección de M y W sobre un plano bidimensional $\text{lin}(e_1, e_l)$ paralelo a $\text{lin } \Delta$). Esto significa que $v \in \Pi_{1,l}$. En el caso restante, cuando Γ es paralelo a Π , la inclusión $v \in \Pi_{1,l}$ se satisface también (puesto que en este caso $v = -e_1$). Por lo tanto,

$$H(M) \subset \text{norm} \left(\{e_1\} \cup \left(\bigcup_{l>1} \Pi_{1,l} \right) \right),$$

i.e., para el sistema de vectores $H = H(M)$ la inclusión (2) del Teorema 28 se satisface. Esto significa que el cuerpo M satisface la condición (B) del Teorema 30.

Recíprocamente, supongamos ahora que el cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ realiza el caso B) del Teorema 30. Entonces

$$H(M) \subset \text{norm ext}(M^*) \subset \text{lin}(e_1) \cup \left(\bigcup_{l>1} \Pi_{1,l} \right).$$

Hacemos

$$D_l = H(M) \cap (\text{lin}(e_1) \cup \Pi_{1,l}), \quad l = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

i.e., $H(M) = D_2 \cup \dots \cup D_l$. Para todo vector unitario v denotemos por $P(v)$ el

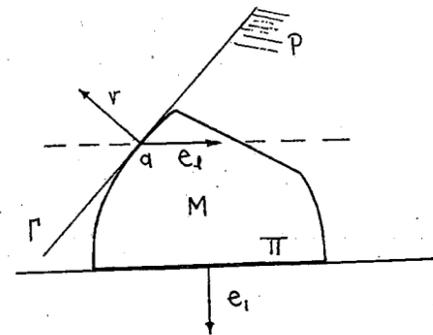


Figura 6:

semi-espacio soporte del cuerpo M con normal exterior unitaria. Entonces

$$M = \bigcap_{v \in H(M)} P(v) = \left(\bigcap_{v \in D_2} P(v) \right) \cap \dots \cap \left(\bigcap_{v \in D_n} P(v) \right) = T_2 \cap \dots \cap T_n,$$

donde T_2, \dots, T_n son los cilindros "beams" definidos por las relaciones

$$T_2 = \bigcap_{v \in D_2} P(v), \dots, T_n = \bigcap_{v \in D_n} P(v).$$

De acuerdo con (1.7), $T_l = L_l \oplus M_l$, donde L_l es el complemento ortogonal del plano $\text{lin}(e_1, e_l)$ y $M_l = \left(\bigcap_{v \in D_l} P(v) \right) \cap \text{lin}(e_1, e_l)$.

Sea e'_i un vector ortogonal al hiperplano R_i generado por los vectores

$$\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}$$

(entonces el sistema de vectores $\{e'_i\}$ es linealmente independiente). Observemos que el hiperplano W_i generado por los vectores $\{e'_1, \dots, e'_{i-1}, e'_{i+1}, \dots, e'_n\}$ tiene como vector normal a e_i . Por lo tanto, $H(W) = \{e_1, \dots, e_n\}$ donde W es un paralelotopo de dimensión n con lados $l_1 \parallel \text{lin}\{e'_1\}, \dots, l_n \parallel \text{lin}\{e'_n\}$. Si denotamos por $G'_{ij} = T_l \cap \text{lin}\{e'_i, e'_j\}$ y por $L'_{ij} \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio de dimensión $(n-2)$ generado por todos los e'_1, \dots, e'_n excepto e'_i, e'_j , entonces $L'_{ij} = L_l$, $W_i \cap W_j = L'_{ij}$, i.e., L'_{ij} es ortogonal a $\text{lin}(e_i, e_j)$ y $T_l = L_l \oplus M_l = L'_{1l} \oplus G'_{1l}$, $l = 2, \dots, n$. Entonces M tiene la representación dada por la relación (1.6). ■

1.2.3 Cuerpos de Kincses

Teorema 32 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, indescomponible y el cual está centrado en el origen, y sea $n \geq 4$. La desigualdad $\text{him } M = 3$ tiene lugar si y sólo si existe una base e_1, \dots, e_n en \mathbb{R}^n y conjuntos convexos, compactos bidimensionales K_1, \dots, K_{n-1} , los cuales están centrados en el origen y son tales que $K_i \subset \text{lin}(e_1, e_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, y

$$M^* = \text{conv}(K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}).$$

Teorema 33 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, indescomponible y el cual está centrado en el origen, y sea $n \geq 5$. La desigualdad $\text{him } M \leq 4$ tiene lugar en y sólo en los siguientes dos casos:

A) existe una base e_1, \dots, e_n en \mathbb{R}^n y conjuntos convexos, compactos, centralmente simétricos K_1, \dots, K_{n-2} , los cuales están centrados en el origen y tal que K_1 es un conjunto tri-dimensional contenido en $\text{lin}(e_1, e_2, e_3)$, el conjunto K_i es bi-dimensional y contenido en $\text{lin}(e_1, e_{i+2})$ para cada $i = 2, \dots, n-2$, y el cuerpo polar M^* tiene la forma

$$M^* = \text{conv}(K_1 \cup \dots \cup K_{n-2}).$$

B) existe una base e_0, \dots, e_{n-1} en \mathbb{R}^n , una descomposición del conjunto de índices $\{2, \dots, n-1\}$ en dos conjuntos disjuntos no-vacíos J_0, J_1 , y conjuntos convexos, compactos bidimensionales K_1, \dots, K_{n-1} , los cuales están centrados en el origen y tal que K_1 está contenido en $\text{lin}(e_0, e_1)$, el conjunto K_i está contenido en $\text{lin}(e_0, e_i)$ para $i \in J_0$, el conjunto K_i está contenido en $\text{lin}(e_1, e_i)$ para $i \in J_1$, y

$$M^* = \text{conv}(K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}).$$

1.3 Dos Generalizaciones Interesantes de la Convexidad Lineal: d -convexidad y h -convexidad. El Teorema de Helly para Conjuntos d -convexos

En esta sección discutiremos dos generalizaciones del concepto de conjunto convexo. Los resultados presentados son, casi en su totalidad, el fruto de los esfuerzos de V. Boltianski, H. Martini y P. Soltan [So],[B1],[B-Ma3],[BMS1] y tiene como objetivo fundamental demostrar versiones correspondientes del Teorema 7 (de Helly).

1.3.1 d -convexidad

Sea E^n un espacio normado de dimensión finita n y B su bola unitaria, i.e., $\{x \in E^n : \|x\| \leq 1\}$. En [So] P. Soltan introdujo el concepto de d -convexidad. Para x y y en E^n , denotemos por $d(x, y)$ la distancia de Minkowski entre x y y respecto a la bola B (vea Secc. 1.1.3). Un conjunto K en E^n se dice que es d -convexo si para todo par de puntos a, c en K , b en E^n , la igualdad $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ implica que b está en K .

Teorema 34 La intersección de una familia arbitraria de conjuntos d -convexos es un conjunto d -convexo.

Teorema 35 El semi-espacio $P \subset E^n$ es d -convexo si y sólo si su hiperplano frontera L es d -convexo.

Teorema 36 Cada conjunto d -convexo, cerrado, con interior no vacío $M \subset E^n$, el cual no es idéntico a E^n , puede ser representado como la intersección de una familia de semi-espacios d -convexos cerrados.

1.3.2 h -convexidad

Sea $H \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario de vectores de la esfera unitaria. Cada semi-espacio de la forma $\{x : \langle f, x \rangle \leq \lambda\}$, $f \in H, \lambda \in \mathbb{R}$ es llamado un semi-espacio H -convexo, y cada conjunto representado como la intersección de una familia de semi-espacios H -convexos es llamado un conjunto H -convexo.

De la definición es claro que cada conjunto H -convexo es cerrado y linealmente convexo. El recíproco es verdadero únicamente cuando $H = S^{n-1}$. En otros términos, si $H \neq S^{n-1}$ existe un conjunto linealmente convexo, cerrado que no es un conjunto H -convexo.

Ejemplo 37 Sean $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ vectores que forman una base de \mathbb{R}^3 y $H = \{e_1, e_2, e_3\}$. Entonces la bola unitaria de \mathbb{R}^3 , S^{2} no es conjunto H -convexo.

Prueba. Los conjuntos H -convexos para $H = \{e_1, e_2, e_3\}$ son únicamente del siguiente tipo

1. Puntos,
2. Líneas,

3. Planos,

4. Paralelepípedos.

Luego, S^{n-1} no es conjunto H -convexo. ■

Teorema 38 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ con el origen en su interior se satisface la inclusión $H(M) = \text{norm}(\text{exp } M^*)$.

Corolario 39 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ con el origen en su interior se satisface la inclusión $H(M) \subset \text{norm}(\text{ext } M^*)$.

Teorema 40 El funcional md, definido sobre la familia de todos los cuerpos convexos, es un invariante afín.

Teorema 41 El funcional md, definido sobre la familia de todos los cuerpos convexos tiene la propiedad de la semicontinuidad inferior. Esto significa que para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ existe un número positivo δ con la propiedad de que para todo cuerpo convexo $N \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\rho(M, N) < \delta$, se satisface la desigualdad $\text{md } N \geq \text{md } M$.

Teorema 42 Un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es H -convexo si y sólo si se tiene que $H(M) \subset \text{cerr } H$.

Teorema 43 Sea $H \subset S^{n-1}$ un sistema de vectores global. La dimensión de Helly de la familia C_H de los conjuntos H -convexos es igual a $\text{md } H$.

1.3.3 La Dimensión de Helly de los Conjuntos d -convexos

Sea E^n un espacio normado de dimensión n , en el cual se ha introducido un producto escalar. Denotemos por $H(E^n)$ el conjunto de todos los vectores unitarios, en el sentido de la métrica Euclidiana, los cuales son ortogonales a un hiperplano d -convexo de E^n . Con la ayuda de este conjunto $H = H(E^n)$, los semi-espacios H -convexos y los conjuntos H -convexos pueden ser estudiados. Del Teorema 35 se tienen los siguientes resultados

Teorema 44 Un semi-espacio cerrado $P \subset E^n$ es H -convexo si y sólo si P es d -convexo.

Teorema 45 Un conjunto convexo, cerrado, con interior no-vacío $M \subset \mathbb{R}^n$ es d -convexo si y sólo si éste es H -convexo.

La clase de todos los conjuntos d -convexos en E^n es un subconjunto de la clase de todos los conjuntos linealmente convexos (obtenidos si E^n es considerado como un espacio vectorial de dimensión n sin métrica alguna). Este subconjunto es un subconjunto propio si y sólo si la bola unitaria Σ de E^n no es estrictamente convexa. Esto será claro a partir del Teorema 48 que se da abajo.

Sea $\Gamma \subset E^n$ un subespacio. Diremos que Γ es un subespacio *ecuatorial* si para todo $x \in \Gamma \cap \text{fr } \Sigma$ todo segmento $I \subset \text{fr } \Sigma$ con $x \in \text{rint } I$ está contenido en el subespacio Γ .

Teorema 46 Un subespacio afín $L \subset E^n$ es d -convexo si y sólo si el subespacio Γ paralelo a L es ecuatorial.

Teorema 47 Sea $M \subset E^n$ un cuerpo convexo. El cuerpo M es d -convexo si y sólo si cada hiperplano soporte en un punto regular es d -convexo, i.e., paralelo a un hiperespacio ecuatorial.

Para todo hiperplano $P \subset E^n$ que no pasa por el origen, su imagen polar es un punto G^* en el espacio conjugado. Si $P = \Gamma \subset E^n$ es un hiperespacio (subespacio vectorial de dimensión $n - 1$), entonces su punto correspondiente en el espacio conjugado está situado en el infinito. Por eso, en lugar de considerar tal punto, en [B-Ma3] se usa la línea Γ^* a través del origen que representa al mencionado punto.

Teorema 48 Un hiperespacio lineal $\Gamma \subset E^n$ es ecuatorial con respecto a Σ si y sólo si la línea Γ^* tiene una dirección belt con respecto al cuerpo polar Σ^* .

Denotemos por B el conjunto de todos los hiperespacios ecuatoriales del espacio E^n y por B^* el conjunto de todas las líneas polares Γ^* para $\Gamma \in B$. En virtud del Teorema 48, B^* es el conjunto de todos subespacios unidimensionales en $(E^n)^*$ los cuales tienen una dirección belt con respecto a Σ^* . Para toda línea $\Gamma^* \in B^*$ consideremos los dos puntos en los cuales Γ^* intersecta a $\text{fr } \Sigma^*$ y denotemos por $H(E^n)$ la unión de todos estos puntos. El número $\text{md } H(E^n)$ es llamado la dimensión de Helly del espacio E^n y es denotada por $\text{him } E^n$.

Teorema 49 Para todo cuerpo d -convexo $M \subset E^n$ se cumple la desigualdad $\text{md } M \leq \text{him } E^n$.

Sean M_1, \dots, M_s conjuntos d -convexos en E^n . Si cada $\text{him } E^n + 1$ de estos conjuntos tiene intersección no vacía, entonces

$$M_1 \cap \dots \cap M_s \neq \emptyset.$$

Prueba. Por el Teorema 45, la dimensión de Helly de los cuerpos d -convexos es igual a la dimensión de Helly de los conjuntos $H(E^n)$ -convexos. Finalmente, del Teorema 43, esta última es igual a $\text{md } H(E^n) = \text{him } E^n$. ■

En vista de todo lo anterior, en particular del Teorema 45, se podría pensar que la H -convexidad es solamente una parte de la d -convexidad. Sin embargo, esto no es así. De hecho, no para cualquier $H \subset S^{n-1}$ en E^n es posible encontrar una norma de tal manera que se tenga $H = H(E^n)$. La definición del conjunto $H(E^n)$ implica que este conjunto es simétrico respecto al origen. Más aun, se demuestra que $H(E^n)$ necesariamente es un conjunto compacto. Por lo tanto, un conjunto $H \subset S^{n-1}$, el cual no es simétrico respecto al origen o no es compacto, no puede ser representado en la forma $H(E^n)$. Lo que es más notable aun es que puede existir un conjunto $H \subset S^{n-1}$ el cual satisface las dos condiciones anteriores y, sin embargo, no es representable en la forma $H(E^n)$ como lo demuestra el bonito ejemplo 24.1 de [BMS1].

Capítulo 2

Sistemas Inmovilizadores de Cuerpos Convexos

2.1 Cardinalidades Mínimas de Sistemas Inmovilizadores

2.1.1 El Problema de Inmovilizar un Objeto

2.1.2 Inmovilización Según L. Fejes Tóth. Historia del Problema

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $F \subset \text{fr } M$ un conjunto en la frontera de M . Una dirección l definida por un vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$ es llamada una *dirección de movimiento exterior* con respecto a F , si para toda $\lambda > 0$ la igualdad $(-\lambda e + \text{int } M) \cap F = \emptyset$ se satisface. Un conjunto $F \subset \text{fr } M$ es un *sistema inmovilizador* para M (con respecto a traslaciones) si no existen direcciones de movimiento exterior con respecto a F .

Un sistema inmovilizador $F \subset \text{fr } M$ es *primitivo* si ningún subconjunto propio de F es un sistema inmovilizador para M .

Denotemos por $\varrho_{\min}(M)$ el más pequeño de los enteros s con la propiedad de que existe un sistema inmovilizador primitivo de M que consta de s puntos. Análogamente, denotemos por $\varrho_{\max}(M)$ el más grande de los enteros s con la propiedad de que existe un sistema inmovilizador primitivo de M que consta de s puntos.

En [Fe] L. Fejes Tóth clasificó los poliedros primitivos, es decir, aquellos poliedros convexos que no tienen caras superfluas en el sentido de que si se omite alguna

cara, las caras restantes no determinan un poliedro convexo. Su investigación la realizó observando que el conjunto de vectores normales unitarios exteriores de un poliedro primitivo son un sistema inmovilizador primitivo de S^2 . Esta equivalencia se establece de manera informal y varios resultados que relacionan sistemas inmovilizadores y sistemas globales de normales de cuerpos convexos son implícitamente supuestos y, en el mejor de los casos, apenas se esboza su demostración. En esta y en la siguiente sección discutiremos varios resultados de V. Boltianski y H. Martini, contenidos en [B-Ma1], que formalizan las principales ideas de Fejes Tóth y Grünbaum relativos a sistemas inmovilizadores. Tales resultados resultan ser la maquinaria de trabajo para el estudio de los números $\varrho_{\min}(M)$ y $\varrho_{\max}(M)$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Diremos que una dirección l definida por un vector no cero e ilumina el punto $a \in \text{Fr } M$ si, para toda $\lambda > 0$ suficientemente pequeña, el punto $a + \lambda e$ está situado en el interior $\text{int } M$ de M .

Los siguientes tres sencillos resultados representan una herramienta importante en el estudio de los sistemas inmovilizadores primitivos puesto que son criterios alternativos para determinar, por un lado, cuando un sistema de puntos $F \subset \text{fr } M$ en la frontera de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema inmovilizador y, por otra parte, nos ofrecen un criterio de primitividad de los sistemas inmovilizadores. Estos criterios están dados en términos de los conceptos de iluminación y sistemas globales de vectores, donde este último es particularmente útil para el estudio de $\varrho_{\min}(M)$ y los primeros dos para la investigación de $\varrho_{\max}(M)$.

Teorema 50 (BM1) *Un subconjunto $F \subset \text{fr } M$ es un sistema inmovilizador para un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si cada dirección ilumina al menos un punto de F .*

Prueba. Si una dirección l , definida por el vector $e \neq 0$, ilumina un punto $b \in F$, i.e., $b + \lambda e \in \text{int } M$, para algún número positivo λ , entonces $b \in -\lambda e + \text{int } M$, i.e., l no es una dirección de movimiento exterior con respecto a F . Inversamente, si l no es una dirección de movimiento exterior con respecto a F , entonces l ilumina al menos un punto $b \in F$. ■

Teorema 51 *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $F = \{b_1, \dots, b_s\} \subset \text{fr } M$ un sistema de puntos regulares. Denotemos por p_1, \dots, p_s los vectores normales unitarios en los puntos b_1, \dots, b_s . El sistema $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema inmovilizador de M si y sólo si el sistema de vectores $\{p_1, \dots, p_s\}$ es global.*

Prueba. Supongamos que el sistema de vectores no es global, i.e., existe un $q \in S^{n-1}$ tal que $\langle q, p_i \rangle \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, s$. Esto significa que $M \subset \Pi_i =$

$\{x : \langle p_i, x - b_i \rangle \leq 0\}$, mientras que el rayo l que parte de b_i en la dirección de q no tiene un punto en común con $\text{int } \Pi_i$. Por lo tanto, b_i no es iluminado por la dirección la cual es determinada por el vector q . Esto es verdad para todo $i = 1, \dots, s$, i.e., la dirección de q no ilumina ninguno de los puntos $\{b_1, \dots, b_s\}$. Luego, por BM1, el sistema $\{b_1, \dots, b_s\}$ no es inmovilizador. Esto prueba la primera parte del teorema.

Aplicando el razonamiento anterior en sentido inverso se tiene la otra parte del resultado. ■

Teorema 52 *Sea $F \subset \text{fr } M$ un sistema inmovilizador del cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$. F es primitivo si y sólo si para cada $a \in F$ existe una dirección que ilumina a a y a ningún otro punto de F .*

Prueba. Si F es primitivo, $B_a = F - \{a\}$ no es sistema inmovilizador para todo $a \in F$. Por lo tanto, existe una dirección de movimiento exterior con respecto a B_a , es decir, existe un vector no zero e_a en \mathbb{R}^n tal que se satisface la relación

$$(\text{int } M - \lambda e_a) \cap B_a = \emptyset. \quad (2.1)$$

De aquí que $b + \lambda e_a$ no pertenece al interior de M para todo $\lambda > 0$ y todo $b \in B_a$. En efecto, si $b + \lambda e_a = c \in \text{int } M$, entonces $b = c - \lambda e_a$ lo cual contradice la relación (2.1). Luego, ningún punto de B_a es iluminado por e_a . Finalmente, puesto que F es sistema inmovilizador de M , por BM1, e_a ilumina a algún punto de F . Este punto debe ser a puesto que e_a no ilumina ningún punto de B_a . De aquí se tiene la primera parte del corolario.

Aplicando el razonamiento anterior en sentido inverso se tiene la otra parte del resultado. ■

Para cardinalidades de sistemas inmovilizadores *minimales* B. Grünbaum encontró cotas inferiores y superiores exactas, en función solamente de la dimensión del cuerpo M [Gr]. De hecho, para todo cuerpo convexo, compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ la siguiente desigualdad se cumple:

$$n + 1 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n.$$

Estas estimaciones son exactas, es decir, existen cuerpos $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\varrho_{\min}(M_1) = n + 1$ y $\varrho_{\min}(M_2) = 2n$. Así lo demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 53 *Sean $B^n \subset \mathbb{R}^n$ y $P^n \subset \mathbb{R}^n$ la bola y el paralelepípedo cuyas dimensiones son iguales a n . Entonces $\varrho_{\min}(B^n) = n + 1$ y $\varrho_{\min}(P^n) = 2n$.*

La demostración de este ejemplo se da en la sección siguiente.

Grünbaum formuló, también en [Gr], el interesante problema: Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, entonces $\varrho_{\min}(M) = 2n$ si y sólo si M es un paralelotopo de dimensión n .

Este problema, claramente, tiene una parte trivial: el regreso. La otra parte es verdadera y la demostración de este hecho se da en el teorema 87.

2.1.3 Resultados de V. G. Boltianski y H. Martini para $\varrho_{\min}(M)$: la cota superior

Un siguiente paso en la investigación del número $\varrho_{\min}(M)$ fue dado por V. G. Boltianski y H. Martini quienes establecen, en el fascinante trabajo [BMa1], estimaciones más detalladas, dependiendo de $\dim M$ y de $\text{md } M$, de aquellas obtenidas por Grünbaum.

De manera más precisa, los principales resultados, a este respecto, son:

Teorema 54 (BM2) Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, existe un sistema inmovilizador minimal $F \subset \text{fr } M$ tal que todo $a \in F$ es un punto frontera regular de M .

Teorema 55 (BM3) Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, el número $\varrho_{\min}(M)$ es igual al más pequeño de los enteros r con la propiedad de que existe un subsistema $\{q_1, \dots, q_r\} \subset H(M)$ el cual es global.

Teorema 56 (BM4) Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, se satisface la desigualdad

$$n + 1 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M.$$

Teorema 57 (BM5) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo el cual es representable en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k).$$

Estos teoremas se han etiquetado de una forma especial BM2, ..., BM5 puesto que cada uno de ellos será una útil y frecuentemente empleada herramienta.

A partir de estos resultados surge la pregunta natural: ¿Las cotas inferiores y superiores de la desigualdad del Teorema BM4 son exactas? De manera más precisa, fijemos el entero m , $1 \leq m \leq n$.

¿Es verdad que para todos aquellos enteros ϱ que satisfacen $n+1 \leq \varrho \leq 2n+1-m$ existen cuerpos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\text{md } M = m$ y $\varrho_{\min}(M) = \varrho$?

Teorema 58 La cota inferior en la desigualdad del Teorema BM4 no es exacta.

Prueba. La demostración se sigue del hecho, demostrado en el Cap. 3 Secc. 2, Teoremas 82, 83, 84, de que es imposible encontrar en \mathbb{R}^n un cuerpo de Boltianski M (i.e., $\text{md } M = 2$) para el cual $\varrho_{\min}(M) = n + 1$. ■

Por lo tanto, resultan interesantes los siguientes problemas

Problema 59

- i) Encontrar una mejor cota inferior, en función de $\text{md } M$, que la dada por la desigualdad de BM4.
- ii) Encontrar la mejor de las cotas inferiores, en función de $\text{md } M$, para el número $\varrho_{\min}(M)$.

En el capítulo siguiente se resolverá la parte i) del problema anterior, más aún, veremos, en los Teoremas 73 y 74, que la estimación establecida en el Teorema 72 que resuelve i) también resuelve ii).

Adicionalmente, surge de manera natural el siguiente problema [B-Mo1]:

Problema 60 (de Fejes Tóth) Dados los enteros n y ϱ describir geoméricamente todos los cuerpos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\varrho_{\min}(M) = \varrho$.

Los resultados anteriores nos permiten dar, ahora, una bonita y sencilla demostración del Ejemplo 53.

Prueba. (Del Ejemplo 53).

Sea e_1, \dots, e_n una base de \mathbb{R}^n , L_i el espacio lineal generado por e_i e I_k un intervalo contenido en L_k . Como $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$, se tiene que $P^n = I_1 \oplus \dots \oplus I_k$ es un paralelotopo de dimensión n . Por BM5

$$\varrho_{\min}(P^n) = \varrho_{\min}(I_1) + \dots + \varrho_{\min}(I_n) = 2n$$

puesto que $\varrho_{\min}(I_i) = 2$ para $i = 1, \dots, n$.

Por otro lado, si fuera cierto que $\varrho_{\min}(B^n) \leq n$, entonces, por BM3, existirían $a_1, \dots, a_t \in \text{fr } B^n$ tales que las normales exteriores q_1, \dots, q_t de B^n en estos puntos serían un sistema global con $t \leq n$. Sin embargo, cualquier conjunto de vectores $H = \{b_1, \dots, b_t\}$ en \mathbb{R}^n , con $t \leq n$, no es global. En efecto, si $t < n$ o los vectores de H son linealmente dependientes, el resultado es directo y se sigue del hecho de que H está contenido en un hiperplano. Si $t = n$ y los vectores son linealmente

independientes, denotemos por L el hiperplano determinado por los primeros $(n-1)$ vectores. Luego existen dos semi-hiperespacios determinados por L . Obviamente, b_n puede pertenecer únicamente a uno de ellos. Por tanto, H no es global. Este absurdo muestra que necesariamente $\varrho_{\min}(B^n) \geq n+1$. Para finalizar basta observar que si inscribimos B^n en un n -simplejo T^n , las $(n+1)$ normales exteriores de B^n en los puntos de intersección, que de hecho son las $(n+1)$ normales exteriores de T^n , es un sistema global. De aquí, por BM3, $\varrho_{\min}(B^n) = n+1$. ■

2.2 Cardinalidades Máximas de Sistemas Inmovilizadores Primitivos

2.2.1 La Conjetura de Danzer

Ahora nos ocuparemos de discutir los principales resultados, previos al presente trabajo, relativos al estudio del número $\varrho_{\max}(M)$.

En 1962 L. Fejes Tóth estableció que $\varrho_{\max}(M) \leq 6$ y conjeturó que esta cota es realizada por los vértices de un hexágono con pares de lados opuestos paralelos.

B. Tomor [T] y S. Fudali [F] demostraron, independientemente, que el problema anterior de Fejes Tóth tenía respuesta positiva.

Naturalmente surge la pregunta: ¿Cuál es la situación en el espacio?

En [D] L. Danzer formuló la siguiente conjetura, la cual establece la analogía con el caso plano y propone el cuerpo convexo que ocupará el lugar del hexágono con caras opuesta paralelas: *el dodecahedro rómbico*.

Conjetura 61 (de Danzer) *Todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^3$ satisface $\varrho_{\max}(M) \leq 14$. Más aún, $\varrho_{\max}(M) = 14$ si y sólo si M es el dodecahedro rómbico*

En otras palabras, él propone que la máxima cardinalidad de un sistema inmovilizador primitivo para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^3$ no es más grande que 14. Sin embargo, contrariamente a lo que se pensaba, en vista del caso plano, B. Bollobás dió una inesperada respuesta a este problema [Bo]. De manera más precisa, él probó que para todo entero positivo $k \geq 6$ existe un cuerpo convexo $M_k \subset \mathbb{R}^3$ con un sistema inmovilizador primitivo $F_k \subset \text{fr } M_k$ que consta de k puntos. Es decir, él probó que *existe una familia de cuerpos convexos $\{M_k\}$, $M_k \subset \mathbb{R}^3$ tales que $\varrho_{\max}(M_k) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.*

Por lo tanto, la Conjetura de Danzer es falsa. Sin embargo, los cuerpos construidos por B. Bollobás dependen esencialmente de k . V. G. Boltianski y H. Martini,

no contentos con este hecho, se dieron a la tarea de demostrar en [B-Ma2] que *el cuerpo convexo $M = \text{conv}(B^3 \cup \{p\}) \subset \mathbb{R}^3$, donde $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ es una bola y $p \notin B^3$, tiene la propiedad de que para todo entero $m \geq 3$ existe un sistema inmovilizador primitivo $F_m \subset \text{fr } M$ que consta de $m+1$ puntos.*

Escribiremos $\varrho_{\max}(M) = \infty$ si existen sistemas inmovilizadores primitivos de M con cardinalidades arbitrariamente grandes. De acuerdo con esta convención, el resultado anterior se puede escribir como sigue: si $M \subset \mathbb{R}^3$ es el casco convexo de B^3 y $p \notin B^3$, entonces $\varrho_{\max}(M) = \infty$.

La construcción del contra-ejemplo de Boltianski-Martini está íntimamente relacionada con propiedades de las *shadow boundaries* de B^3 (vea la definición de shadow boundaries en la sección 4 del Cap. 3 y para ver algunas propiedades características interesantes del elipsoide en términos de shadow boundaries se recomienda [Bu], [Br],[AMMo]). De hecho, la demostración es válida si se reemplaza B^3 por un cualquier cuerpo de revolución M y suponemos que el punto $p \notin M$ pertenece al eje de revolución de M , i.e., el cuerpo $K = \text{conv}(M \cup \{p\})$ tiene la propiedad de que $\varrho_{\max}(K) = \infty$. Es de esta manera que se ofrecen, también en [B-Ma2], cuerpos convexos $Z \subset \mathbb{R}^n$ que satisfacen $\varrho_{\max}(M) = \infty$ y que, adicionalmente, resultan ser zonoides.

A pesar de que se dió respuesta negativa a la Conjetura de Danzer, esta tiene varias variantes interesantes. Por ejemplo, dado que el contra-ejemplo de Boltianski-Martini no es un poliedro, uno puede preguntarse: ¿La Conjetura de Danzer tiene sentido si nos restringimos a considerar exclusivamente la familia de los poliedros? En otras palabras, ¿Es verdad que todo poliedro convexo, compacto $M \subset \mathbb{R}^3$ satisface $\varrho_{\max}(M) \leq 14$?

En [B-Ma2] se dió respuesta, también negativa, a este asunto demostrando un resultado similar al de Bollobás para poliedros con un ingrediente adicional notable; el resultado no es demostrado únicamente en el contexto de los poliedros sino que también en el de los zonotopos. De manera más precisa:

Para cada entero $m \geq 9$ existe un zonotopo $M_m \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que $\varrho_{\max}(M_m) \geq m+1$.

Naturalmente, tiene sentido formular la correspondiente versión del Problema de Fejes Tóth para el número $\varrho_{\max}(M)$.

Problema 62 (Simétrico de Fejes Tóth) *Dados los enteros n y ϱ describir geoméricamente todos los cuerpos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\varrho_{\max}(M) = \varrho$.*

En vista de los resultados previamente establecidos este problema tiene sentido para $6 \leq \varrho \leq \infty$. Por supuesto, los casos extremos siempre son interesantes. En el

presente trabajo (Cap. 3) hemos efectuado una investigación del problema 62 para el caso $\varrho = \infty$, es decir, establecemos un bonito resultado para cuerpos convexos $K \subset \mathbb{R}^n$ con sistemas inmovilizadores primitivos con cardinalidades arbitrariamente grandes. De hecho, nosotros demostramos, este resultado está contenido en [Mo], que en el contra-ejemplo de Boltianski-Martini es posible reemplazar B^3 por cualquier cuerpo estrictamente convexo, con frontera regular $M \subset \mathbb{R}^n$ y seguir obteniendo que $K = \text{conv}(M \cup \{p\})$, con $p \notin M$, tiene la propiedad de que $\varrho_{\max}(K) = \infty$. De manera precisa, se tiene el siguiente

Teorema 63 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo estrictamente convexo, con frontera regular y $p \notin M$ un punto. Entonces $K = \text{conv}(M \cup \{p\})$ tiene únicamente un punto frontera no regular y $\varrho_{\max}(K) = \infty$.

La solución general del Problema Simétrico de Fejes Tóth para el caso $\varrho = \infty$, en nuestra opinión, está todavía lejana. Como un ejemplo para ilustrar esto, considere el siguiente problema:

Conjetura 64 (de Morales) Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo con la propiedad de que $\varrho_{\max}(K) = \infty$. Entonces, para todo entero $k \geq 3$, existe un sistema inmovilizador primitivo con $k + 1$ puntos.

Como una forma de entender este problema, veamos que tendríamos que hacer para dar respuesta negativa a la conjetura. Sea $\{m_1, \dots, m_k\}$ un conjunto finito de enteros positivos. Tendríamos que encontrar un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ para el que, por un lado, existieran sistemas inmovilizadores primitivos con cardinalidades arbitrariamente grandes y, por lo tanto, $\varrho_{\max}(M) = \infty$, en virtud de la definición, y, por otro lado, cualquier conjunto de puntos $F \subset \text{fr } M$ cuya cardinalidad sea igual a m_i , $i = 1, \dots, k$ no fuera un sistema inmovilizador primitivo de M .

Otro problema interesante en la inmovilización de un poliedro P , en el sentido establecido por nosotros, surge cuando imponemos la condición adicional de que el sistema inmovilizador primitivo sea el conjunto de vértices $V(P)$ de P . Sea $\Phi(n)$ la familia de todos los politopos convexos, compactos $P \subset \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $V(P)$ es un sistema inmovilizador primitivo de P . Una vez más son de interés los extremos: ¿Cuál es la cardinalidad más pequeña que puede tener $V(P)$ para $P \in \Phi(n)$? ¿Cuál es la cardinalidad más grande?

Con respecto a la primera pregunta, P. Mani demostró en [M] que ningún politopo $P \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, con menos de $2n + 2$ vértices puede ser inmovilizado por el conjunto de sus vértices.

Con relación a la segunda interrogante, la Conjetura de Danzer permanece interesante en el siguiente sentido:

Conjetura 65

- i) Existe un entero positivo c tal que $\text{card } V(P) \leq c$ para todo $P \in \Phi(3)$.
- ii) $\text{card } V(P) \leq 14$ para todo $P \in \Phi(3)$.
- iii) $\text{card } V(P) = 14$ si y sólo si P es el dodecahedro rómbico.

Puesto que este problema tiene reconocida dificultad valdría la pena resolverse aun en el caso en que P es supuesto centralmente simétrico.

En el Capítulo 3 demostraremos que la parte iii) de esta conjetura es falsa puesto que existen varios poliedros $P \subset \mathbb{R}^3$, diferentes entre sí combinatoriamente, centralmente simétricos con 14 vértices para los cuales el conjunto $V(P)$ es un sistema inmovilizador primitivo de P y son diferentes del Dodecahedro rómbico.

2.2.2 El Contra-ejemplo de Boltianski - Martini

En esta sección presentamos el cuerpo $M \subset \mathbb{R}^3$ de Boltianski-Martini con la propiedad de que tiene únicamente un punto frontera regular y tal que tiene sistemas inmovilizadores primitivos con cardinalidad arbitrariamente grande, i.e., $\varrho_{\min}(M) = \infty$. Ofrecemos aquí también la demostración original de Boltianski y Martini [B-Ma2] que garantiza el hecho de que M satisface las propiedades mencionadas. Hemos querido incluir esta demostración en el presente trabajo porque consideramos que esta está caracterizada por tener una elegancia y una sencillez exquisitas, por una parte, y, por otro lado, nos permitirá una mejor comprensión del Teorema 63 el cual demuestra la no unicidad del cuerpo de Boltianski-Martini (vea Secc. 4 Cap. 3).

En un sistema ortogonal de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en \mathbb{R}^3 , denotemos por $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ la bola de radio $\sqrt{2}$, centrada en el origen, y por M el cuerpo $\text{conv}(B^3 \cup \{b\})$, donde b es el punto $(0, 0, -2)$. Sea C_λ la circunferencia $\text{fr}(B^3 \cap \Gamma_\lambda)$, donde Γ_λ es el plano que consiste de los puntos $x = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_3 = \lambda$, $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$.

Escojamos un punto arbitrario $q \in C_{-1}$ y denotemos por l_q la dirección definida por el vector $q - b$ (Fig. 7). El conjunto $G_q \subset \text{fr } M$ el cual es iluminado por la dirección l_q puede ser descrito de la siguiente manera. Consideremos el semi-espacio abierto $\Pi_q = \{x : \langle x, q - b \rangle < 0\}$; entonces $G_q = (\text{fr } M \cap \Pi_q) \setminus [b, q]$. La frontera relativa del conjunto $G_q \subset \text{fr } M$ es la unión del segmento $[b, q]$ y un círculo máximo $Z_q = \text{fr } B \cap \text{fr } \Pi_q$.

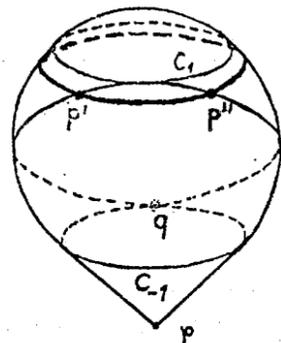


Figura 7:

La intersección $Z_q \cap C_{1-\varepsilon}$ (donde $0 < \varepsilon < 1$) consiste de dos puntos p', p'' , y denotamos por $\varphi(\varepsilon)$ el ángulo entre los vectores $p' - g, p'' - g$, donde g es el centro de la circunferencia $C_{1-\varepsilon}$. Cuando el parámetro ε corre a través del segmento $[0, 1]$, el ángulo $\varphi(\varepsilon)$ varía entre 0 y π .

Sea ahora $m \geq 3$ un entero. Escogemos y fijamos un número positivo ε tal que

$$\frac{2\pi}{m} < \varphi(\varepsilon) < \frac{4\pi}{m}.$$

Más aún, escogemos puntos a_1, \dots, a_m los cuales dividen la circunferencia $C_{1-\varepsilon}$ en m arcos iguales, y denotamos por F el conjunto $\{b, a_1, \dots, a_m\}$. Se demuestra a continuación que $F \subset \text{fr } M$ es un sistema inmovilizador primitivo para el cuerpo M .

De hecho, puesto que $\varphi(\varepsilon) > \frac{2\pi}{m}$, el arco $w_q \subset C_{1-\varepsilon}$, más pequeño que un semicírculo, con puntos extremos p', p'' contiene al menos uno de los puntos a_1, \dots, a_m . Por lo tanto, para todo $q \in C_{-1}$ la dirección del vector $q - b$, i.e., toda dirección que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el x_3 -eje positivo ilumina al menos uno de los puntos a_1, \dots, a_m . Luego, toda dirección, que forma con el x_3 -eje positivo un ángulo no menor que $\frac{\pi}{4}$, también ilumina al menos uno de los puntos a_1, \dots, a_m . Y si una dirección forma con el x_3 -eje positivo un ángulo no mayor que $\frac{\pi}{4}$, entonces esta dirección ilumina al punto b . Por lo tanto, toda dirección ilumina al menos uno de los puntos del conjunto F , i.e., F es un sistema inmovilizador del conjunto M en virtud del BM1.

Por otro lado, si para algún entero $k \in \{1, \dots, m\}$ el punto $q \in C_{-1}$ es escogido de tal manera que el arco w_q con extremos p', p'' tiene su punto medio en el punto

a_k , entonces la dirección del vector $q - b$ ilumina únicamente el punto a_k del conjunto F (puesto que $\varphi(\varepsilon) < \frac{4\pi}{m}$). Más aún, la dirección del x_3 -eje ilumina únicamente el punto b del conjunto F . Luego, para cada punto de F existe una dirección que ilumina exclusivamente a este punto de F y, por lo tanto, en virtud del Teorema 49, el sistema inmovilizador $F \subset \text{fr } M$ es primitivo. De donde $\varrho_{\max}(M) = \infty$.

2.3 Sistemas Inmovilizadores Primitivos para Cuerpos Convexos Descomponibles en Suma Vectorial Directa: Un Teorema Importante

A continuación, vamos a demostrar un resultado, contenido en el Teorema 66, que determina el número $\varrho_{\max}(M)$ para cuerpos convexos que son expresados como suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Este es un resultado análogo al Teorema BM5. La demostración del Teorema 66 a pesar de recoger las principales ideas de la demostración del Teorema BM5, es original. El Teorema 66 se presenta de tal manera que incluye también la demostración del Teorema BM5. Este resultado constituye una herramienta muy importante en varios de nuestros principales resultados y es por ello que se incluye una demostración completa.

Teorema 66 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k)$$

$$\varrho_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k).$$

Para obtener una prueba de este teorema es necesario demostrar algunos resultados auxiliares.

Consideremos $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, compacto en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Para todas las consideraciones siguientes supondremos, y sin que por esto perdamos generalidad, que $\text{lin } M_i$ es un subespacio, i.e., $o \in \text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$ y que $o \in \text{int } M$. Denotemos por N_i la suma vectorial directa de todos los subespacios $\text{lin } M_j$ excepto para $\text{lin } M_i$ y sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{lin } M_i$ la proyección cuyo núcleo es N_i . Sea $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{fr } M$ un sistema inmovilizador primitivo de M . Diremos que el punto $b_\alpha \in A$ pertenece al índice i , si $\pi_j(b_\alpha) \in \text{rint } M_j$ para todo j excepto para i . Notemos que si b_α pertenece

al índice i , entonces $\pi_i(b_\alpha) \in \text{relfr } M_i$, puesto que $b_\alpha \in \text{fr } M$. Puede ser que algunos puntos de A no pertenezcan a ningún índice, i.e., $\pi_j(b_k) \in \text{relfr } M_j$ para más de un índice j . Denotemos por $A_i \subset A$ el conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$.

Lema 67 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, compacto en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Supongamos que $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{fr } M$ es un sistema inmovilizador primitivo de M . Entonces todo elemento de A pertenece a algún índice $s \in \{1, \dots, k\}$.

Prueba. La prueba será dada por reducción al absurdo. Supongamos que existen $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $\alpha \in \{1, \dots, \mu\}$ tales que $\pi_t(b_\alpha) \in \text{relfr } M_t$, $t = i, j$. Sea, por ejemplo, que esto se tiene para los índices $i = 1$, $j = 2$ y $\alpha = 1$, i.e.,

$$\pi_t(b_1) \in \text{relfr } M_t, \quad t = 1, 2. \quad (2.2)$$

Veamos que b_1 es un punto "superfluo" de A . Sea $e = e_1 + \dots + e_k$ un vector no cero en \mathbb{R}^n , donde $e_i \in \text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Observemos que si e es tal que $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$, b_1 no es iluminado por e , en virtud de (2.2). Supongamos que b_1 es iluminado por e . Veamos que e ilumina a algún otro punto de $A - \{b_1\}$. De aquí por el Teorema 52, se contradiría el hecho de que A es primitivo. Puesto que b_1 es iluminado por e , $e_1 \neq 0$. Como A es sistema inmovilizador de M , existe $b_\rho \in A$ tal que b_ρ es iluminado, en \mathbb{R}^n , por e_1 , i.e., $b_\rho + \lambda e_1 \in \text{int } M$ para λ suficientemente pequeña. Por un lado,

$$\pi_1(b_\rho + \lambda e_1) = \pi_1(b_\rho) + \lambda e_1 \in \text{rint } M_1. \quad (2.3)$$

Por otra parte, $\pi_j(b_\rho + \lambda e_1) = \pi_j(b_\rho) \in \text{rint } M_j$, $j = 2, \dots, k$, por lo que $\pi_2(b_\rho) + \dots + \pi_k(b_\rho) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k$. Por tanto, existe $\lambda_1 > 0$ pequeña tal que

$$\pi_2(b_\rho) + \dots + \pi_k(b_\rho) + \lambda_1(e_2 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k \quad (2.4)$$

Si $\lambda_1 > \lambda$ de (2.4) concluimos que

$$\pi_2(b_\rho) + \dots + \pi_k(b_\rho) + \lambda(e_2 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k \quad (2.5)$$

(puesto que entre dos puntos interiores de un conjunto convexo E existen únicamente puntos interiores de E). Por lo tanto, de (2.3) y de (2.5) se tiene que

$$b_\rho + \lambda e = \pi_1(b_\rho) + \pi_2(b_\rho) + \dots + \pi_k(b_\rho) + \lambda(e_1 + \dots + e_k).$$

y

$$\pi_1(b_\rho) + \pi_2(b_\rho) + \dots + \pi_k(b_\rho) + \lambda(e_1 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_1 + \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k$$

y como

$$\text{rint } M_1 + \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k = \text{int } M,$$

entonces,

$$b_\rho + \lambda e \in \text{int } M. \quad (2.6)$$

Si $\lambda > \lambda_1$, entonces (2.3) es válida para $\lambda = \lambda_1$, i.e., $\pi_1(b_\rho) + \lambda_1 e_1 \in \text{rint } M_1$. De aquí y de (2.4) se tiene que $b_\rho + \lambda_1 e \in \text{int } M$. ■

Lema 68 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, compacto en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Supongamos que $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{fr } M$ es un sistema inmovilizador primitivo de M . Denotemos por $A_i \subset A$ el conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$. Si $b_i, b_j \in A_\beta$, para algún $\beta \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\pi_\beta(b_i) \neq \pi_\beta(b_j)$.

Prueba. Contrariamente a lo afirmado por el lema, supongamos que existen $b_i, b_j \in A$ que pertenecen al índice β y $\pi_\beta(b_i) = \pi_\beta(b_j)$. Sea $e = e_1 + \dots + e_k$ un vector no cero en \mathbb{R}^n , donde $e_i \in \text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$, el cual ilumina a b_i . Veamos que e ilumina también a b_j . Como b_j tiene índice β , tenemos que $\pi_s(b_j) \in \text{rint } M_s$, $s \neq \beta$. Luego, es posible encontrar $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\pi_s(b_j) + \lambda e_s \in \text{rint } M_s, \quad \lambda < \lambda_0, \quad s \neq \beta. \quad (2.7)$$

Puesto que $b_i + \lambda e \in \text{int } M$ para $\lambda < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$ pequeña, tenemos que $\pi_s(b_i + \lambda e) \in \text{rint } M_s$, $s = 1, \dots, k$. En particular, la anterior relación es válida para $s = \beta$, i.e., $\pi_\beta(b_i) + \lambda e_\beta \in \text{rint } M_\beta$, $\lambda < \lambda_1$. Esta a su vez implica, en virtud de la hipótesis, que

$$\pi_\beta(b_j) + \lambda e_\beta \in \text{rint } M_\beta, \quad \lambda < \lambda_1. \quad (2.8)$$

Sea $\bar{\lambda} > 0$ igual al mínimo de $\{\lambda_0, \lambda_1\}$. Puesto que las relaciones (2.7) y (2.8) son válidas para $\lambda < \bar{\lambda}$ y puesto que M tiene representación en suma vectorial directa, concluimos que $b_j + \lambda e \in \text{int } M$, $\lambda < \bar{\lambda}$, es decir, b_j es iluminado por e . En virtud del Teorema 52, existe una dirección e' que ilumina a b_i y nada más a b_i . Por el razonamiento de arriba, e' también ilumina a b_j y, por lo tanto, se contradice la elección de e' . Luego, $\pi_\beta(b_i) \neq \pi_\beta(b_j)$ para $i \neq j$. ■

Lema 69 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$. Sea $A \subset \text{fr } M$ un sistema inmovilizador primitivo de M . Entonces $\pi_i(A_i)$ es un sistema inmovilizador primitivo de M_i , $i = 1, \dots, k$.

Prueba. Denotemos por μ_i la cardinalidad del conjunto A_i . Designemos a los puntos de $\pi_i(A_i)$ por c_j^i donde $j = 1, \dots, \mu_i$, $i = 1, \dots, k$. Del hecho de que M tiene representación en suma vectorial directa y del Lemas 67, podemos concluir que existen vectores $d_j^i \in N_i \cap \text{int } M$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \mu_i$ tales que el conjunto de vectores $f_j^i = c_j^i + d_j^i$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \mu_i$ es igual a A .

Primeramente, veamos que $\pi_i(A_i)$ es un sistema inmovilizador. Sea $e \in \text{lin } M_i$ un vector no cero. Supongamos que e no ilumina a ningún punto c_j^i , $j = 1, \dots, \mu_i$, con respecto a $\text{lin } M_i$. Afirmamos que e no ilumina, con respecto a \mathbb{R}^n , a ningún punto f_j^m , $m = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \mu_m$. Sea $m = i$. Supongamos que e ilumina a algún f_j^i . Sea, por ejemplo, que e ilumina a $f_{j_0}^i$, i.e., $f_{j_0}^i + \lambda e \in \text{int } M$ para λ pequeña. Por lo tanto, $\pi_i(f_{j_0}^i + \lambda e) \in \text{rint } M_i$, i.e., $c_{j_0}^i + \lambda e \in \text{rint } M_i$ (puesto que $d_{j_0}^i \in N_i \cap \text{int } M$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \mu_i$) lo cual contradice nuestra suposición de que ninguno de los c_j^i es iluminado por e . Para $m \neq i$, tenemos $\pi_m(f_j^m + \lambda e) = c_j^m \in \text{relfr } M_m$, $j = 1, \dots, \mu_m$. De donde f_j^m no puede ser iluminado por e . Luego, el conjunto A no es sistema inmovilizador, lo cual contradice nuestra elección sobre el conjunto A . Por lo tanto, todo vector $e \in \text{lin } M_i$ ilumina a al menos un punto del conjunto c_j^i , $j = 1, \dots, \mu_i$, i.e., c_j^i es un sistema inmovilizador de M_i .

A continuación veremos que $\pi_i(A_i)$ es primitivo. Supongamos lo contrario, i.e., supongamos que existe $c_{j_0}^i \in \pi_i(A_i)$ tal que $\pi_i(A_i) - \{c_{j_0}^i\}$ es sistema inmovilizador de M_i .

Sea $e = e_1 + \cdots + e_k$ un vector no cero en \mathbb{R}^n , donde $e_i \in \text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Si $e_i = 0$, f_j^i , $j = 1, \dots, \mu_i$ no es iluminado por e ya que $e \in \ker \pi_i$ y, por lo tanto, $\pi_i(f_j^i + \lambda e) = c_j^i \in \text{relfr } \pi_i(M)$. Luego, como A es un sistema inmovilizador de M , e ilumina a algún punto de $A_i - \{f_{j_0}^i\}$. Si $e_i \neq 0$, existe $w \neq j_0$ tal que $c_w^i + \lambda e_i \in \text{rint } M_i$ puesto que $\pi_i(A_i) - \{c_{j_0}^i\}$ es un sistema inmovilizador. A partir de este hecho y de que $d_j^i \in N_i \cap \text{int } M$, concluimos que $(c_w^i + \lambda e) + d_w^i \in \text{int } M$, i.e., $(c_w^i + d_w^i) + \lambda e = f_w^i + \lambda e \in \text{int } M$, es decir, $f_w^i \in A_i - \{f_{j_0}^i\}$ es iluminado por e .

De esta manera todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$ ilumina al menos un punto del conjunto $A_i - \{f_{j_0}^i\}$ por lo que $A_i - \{f_{j_0}^i\}$ es un sistema inmovilizador de M y, por lo tanto, A no es primitivo lo cual contradice la elección de A . ■

Lema 70 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$. Supongamos que los conjuntos $A_i \subset \text{relfr } M_i$, $i = 1, \dots, k$ son sistemas inmovilizadores primitivos de M_i en el subespacio $\text{lin } M_i$. Sea $\varrho_i = |A_i|$. Entonces existe un sistema inmovilizador $A \subset \text{fr } M$ de M con la propiedad de que

$$|A| = \varrho_1 + \cdots + \varrho_k.$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{lin } M_i$ es un subespacio, i.e., $o \in \text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$ y que $o \in \text{int } M$. Supongamos que A_i consta de los puntos $b_j^{(i)} \in \text{relfr } M_i$, $j = 1, \dots, \varrho_i$. Escojamos puntos $a_i \in \text{rint } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Más aún, denotemos el punto

$$a_1 + \cdots + a_k + (b_j^{(i)} - a_i) \in \text{bd } M, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, \varrho_i$$

por $c_j^{(i)}$. El sistema de puntos $\{c_j^{(i)}\}$ contiene $\varrho_1 + \cdots + \varrho_k$ puntos en $\text{fr } M$. Vamos a probar que $\{c_j^{(i)}\}$ es un sistema inmovilizador primitivo del cuerpo M . En efecto, sea $e = e_1 + \cdots + e_k$ un vector no cero en \mathbb{R}^n , donde e_i pertenece al subespacio $\text{lin } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Puesto que $e \neq o$, al menos uno de los sumandos e_1, \dots, e_k es no cero. Sea, por ejemplo, $e_i \neq 0$. Entonces la dirección del vector e_i ilumina en $\text{lin } M_i$ al menos uno de los puntos $b_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, \varrho_i$. Supongamos que tal punto iluminado es $b_1^{(i)}$. Esto significa que $b_1^{(i)} + \lambda e_i \in \text{rint } M_i$ para λ suficientemente pequeña. De donde $c_1^{(i)} + \lambda e \in \text{int } M$ para λ suficientemente pequeña, i.e., el punto $c_1^{(i)}$ es iluminado por la dirección del vector e . Por lo tanto, todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$ ilumina al menos uno de los puntos $c_j^{(i)}$, i.e., $\{c_j^{(i)}\}$ es un sistema inmovilizador para M .

Ahora veamos que $\{c_j^{(i)}\}$ es primitivo. Veamos que existe una dirección de movimiento exterior para cada conjunto $A - \{a\}$ con $a \in \{c_j^{(i)}\}$. Sea, por ejemplo, $a = c_1^1$. Observemos que, para i fijo, los puntos $c_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, \varrho_i$ pertenecen al índice i . En efecto, basta observar, por una parte, que

$$\begin{aligned} \pi_i(c_j^i) &= \pi_i(a_1 + \cdots + a_k + (b_j^i - a_i)) = \pi_i(a_1 + \cdots + a_k - a_i) + \pi_i(b_j^i) \\ &= 0 + b_j^i \in \text{relfr } M_i \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\pi_t(c_j^i) = a_t \in \text{rint } M_t, \quad t \neq i, \quad j = 1, \dots, \varrho_i.$$

Puesto que A_1 es un sistema inmovilizador primitivo, existe una dirección l en $\text{lin } M_1$ la cual no ilumina a ningún punto de $A_1 - \{b_j^1\}$. Por tanto, la misma l , considerada en el espacio \mathbb{R}^n , no ilumina a ninguno de los puntos c_j^1 , $j = 1, \dots, \varrho_1$. Más aún, l no ilumina a ningún c_j^s , $2 \leq s \leq k$, $j = 1, \dots, \varrho_s$. En efecto, puesto que c_j^s pertenece al índice s , $\pi_s(c_j^s) \in \text{relfr } M_s$ y, en consecuencia, la línea de dirección l y que pasa a través de c_j^s no interseca a $\text{int } M$. Por lo que l es una dirección de movimiento exterior de M . Luego, A es primitivo. ■

Corolario 71 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M).$$

Prueba. Consideremos sistemas inmovilizadores primitivos $A_i, B_i \subset \text{relfr } M_i$, $i = 1, \dots, k$ de M_i en $\text{lin } M_i$ con la propiedad de que $|A_i| = \varrho_{\min}(M_i)$ y $|B_i| = \varrho_{\max}(M_i)$. En virtud del Lema 70, existen sistemas inmovilizadores primitivos $A, B \subset \text{fr } M$ tales que

$$|A| = \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \quad \text{y} \quad |B| = \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k)$$

de estas relaciones se sigue que

$$\varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \quad \text{y} \quad \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M).$$

de donde se tiene el resultado. ■

Prueba. (Del Teorema 66).

Sea $A \subset \text{fr } M$ un sistema inmovilizador primitivo de M . Denotemos por $A_i \subset A$ el conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$ y por μ_i la cardinalidad del conjunto A_i , i.e., $\mu_i = |A_i|$. En virtud del Lema 67, tenemos que $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$. De aquí que la cardinalidad $\mu = |A|$ del conjunto A está dada por

$$\mu = |A| = |A_1| + \dots + |A_k| \quad (2.9)$$

Del Lema 68, concluimos que $|\pi_i(A_i)| = |A_i|$, $i = 1, \dots, k$. Por lo que (2.9) se ve como

$$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_k. \quad (2.10)$$

Por otro lado, del Lema 69 sabemos que $\pi_i(A_i)$ es sistema inmovilizador primitivo de M_i , de donde se sigue que $\varrho_{\min}(M_i) \leq |\pi_i(A_i)| \leq \varrho_{\max}(M_i)$, es decir,

$$\varrho_{\min}(M_i) \leq \mu_i \leq \varrho_{\max}(M_i). \quad (2.11)$$

De (2.10) y (2.11) tenemos que

$$\varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \mu \leq \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k)$$

Por lo tanto,

$$\varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k).$$

De la combinación de esta desigualdad y el Corolario 71 tenemos el Teorema 66. ■

Capítulo 3

Nuevos Resultados de Sistemas Inmovilizadores

3.1 Resultados de V. G. Boltianski y E. Morales Amaya para $\varrho_{\min}(M)$: la cota inferior

Teorema 72 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, se satisface la desigualdad

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M).$$

Por lo tanto,

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M.$$

Teorema 73 Las estimaciones inferiores y superiores dadas en el Teorema 1 son exactas. Más aún, para todo entero ϱ con la propiedad de que

$$n + \frac{n}{m} \leq \varrho \leq 2n + 1 - m, \quad (3.1)$$

existe un cuerpo convexo M tal que

$$\text{md } M = m \quad \text{y} \quad \varrho_{\min}(M) = \varrho. \quad (3.2)$$

La idea sencilla de la prueba es considerar $M = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$, donde B_i es una bola con $\dim B_i \leq m$, $i = 1, \dots, k$ y establecer para dimensiones adecuadas

de las bolas, que M satisfaga (3.2). Por lo tanto, después de la realización de esta idea, ofrecemos ejemplos concretos de cuerpos convexos los cuales satisfacen (3.2) sobre la condición (3.1). Pero estos cuerpos son *descomponibles*, i.e., cada uno de ellos es representable en suma vectorial directa de conjuntos convexos de dimensión menor. El siguiente teorema muestra que es posible, mediante una construcción más complicada, obtener lo anterior para cuerpos *indescomponibles*.

Teorema 74 Para todo entero ϱ que satisface (3.1) con $m \geq 2$ existe un cuerpo convexo, indescomponible $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{md } M = m$ y $\varrho_{\min}(M) = \varrho$.

Lema 75 Sea H un sistema de vectores en \mathbb{R}^n tal que H es global y $\text{md } H = m$. Sean, por lo tanto, $q_1, \dots, q_{m+1} \in H$ vectores mínimamente dependientes. Denotemos por N el complemento ortogonal del subespacio $L = \text{lin}(q_1, \dots, q_{m+1})$ y por $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow N$ la proyección ortogonal. Entonces el sistema de vectores $H' = \pi(H \setminus L)$ es global en N y $\text{md } H' \leq m$.

Prueba. Supongamos que H' no es global, i.e., existe un vector no cero $p \in N$ tal que $\langle p, v \rangle \leq 0$ para todo $v \in H'$. Puesto que p es ortogonal a L , tenemos que $\langle p, u \rangle = 0$ para todo $u \in H \cap L$. Sea ahora $u \in H \setminus L$. Entonces $v = \pi(u) \in H'$ y, por lo tanto, $\langle p, \pi(u) \rangle \leq 0$. Más aún, $u - \pi(u) \in L$ y de donde $\langle p, u - \pi(u) \rangle = 0$. Consecuentemente, $\langle p, u \rangle = \langle p, \pi(u) \rangle \leq 0$. Luego, para todo $u \in H$ la desigualdad $\langle p, u \rangle \leq 0$ se satisface, contradiciendo la suposición de que H es global. Esta contradicción muestra que H' es global.

Supongamos ahora que $\text{md } H' > m$, i.e., existen vectores mínimamente dependientes $b_1, \dots, b_s \in H'$, donde $s > m + 1$. Escojamos algunos representantes $a_1, \dots, a_s \in H$ de estos vectores, i.e., $b_i = \pi(a_i)$ para $i = 1, \dots, s$.

Denotemos por $\mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s = 0$ una dependencia positiva entre b_1, \dots, b_s . Los coeficientes μ_1, \dots, μ_s , son definidos unívocamente salvo un múltiplo positivo común. Entonces

$$\pi(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s) = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s = 0,$$

i.e., el vector

$$c = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s \quad (3.3)$$

pertenece a L . Si $c = 0$, entonces los vectores a_1, \dots, a_s son mínimamente dependientes y, por lo tanto, $\text{md } H \geq s - 1 > m$, contradiciendo la notación. Consecuentemente $c \neq 0$. Puesto que los vectores q_1, \dots, q_{m+1} son mínimamente dependientes en el subespacio L de dimensión m , existe una dependencia positiva entre

c y no más que m de los vectores q_1, \dots, q_{m+1} . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que esta dependencia es positiva y que tiene la forma

$$c + \nu_1 q_1 + \dots + \nu_t q_t = 0, \quad (3.4)$$

donde $1 \leq t \leq m$. Sustituyendo (3.3) en (3.4), obtenemos una dependencia positiva

$$\mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s + \nu_1 q_1 + \dots + \nu_t q_t = 0.$$

Más aún, $a_1, \dots, a_{s-1}, q_1, \dots, q_t$ son linealmente independiente. En efecto, si $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{s-1} a_{s-1} + \beta_1 q_1 + \dots + \beta_t q_t = 0$, entonces, aplicando π , obtenemos $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_{s-1} b_{s-1} = 0$, i.e., $\alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$, puesto que b_1, \dots, b_{s-1} son linealmente independientes en N ; así $\beta_1 q_1 + \dots + \beta_t q_t = 0$, i.e., $\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$, luego q_1, \dots, q_t son linealmente independientes en L , puesto que $t \leq m$.

Por lo tanto, los vectores $a_1, \dots, a_s, q_1, \dots, q_t$ (que pertenecen a H) son mínimamente dependientes.

Pero el número de estos vectores es igual a $s+t \geq s+1 > m+2$, contradiciendo la igualdad $\text{md } H = m$. ■

Lema 76 Sea H un sistema global de vectores en \mathbb{R}^n con $\text{md } H = m$. Entonces la cardinalidad $|H|$ de H satisface la desigualdad

$$|H| \geq n + \frac{n}{m}.$$

Prueba. Aplicaremos inducción sobre n . El paso inicial de la inducción es $n = 1$ (y, por lo tanto, $m = 1$). En este caso la afirmación del lema es obvia.

Supongamos que para toda dimensión menor que n , la afirmación del lema se satisface y sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un sistema de vectores global con $\text{md } H = m$. Escojamos vectores mínimamente dependientes $q_1, \dots, q_{m+1} \in H$ y conservemos la notación L, N, π, H' introducida en el lema 75. Denotemos el número $\text{md } H'$ por m' . Entonces $m' \leq m$ (por el lema 75). Puesto que $\dim N = n - m < n$, por la hipótesis de inducción,

$$|H'| \geq n - m + \frac{n - m}{m'}.$$

Así,

$$\begin{aligned} |H| &\geq (m+1) + |H'| \geq (m+1) + \left(n - m + \frac{n - m}{m'} \right) \\ &= n + 1 + \frac{n - m}{m'} \geq n + 1 + \frac{n - m}{m} = n + \frac{n}{m} \end{aligned}$$

Prueba. (del Teorema 72) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, $\text{md } M = \bar{m}$. Denotemos el número $\varrho_{\min}(M)$ por r . Entonces por BM3, existe un subsistema global $H = \{q_1, \dots, q_r\} \subset H(M)$. El número $m = \text{md } H$ no es más grande que \bar{m} . Luego, por el lema 76,

$$\varrho_{\min}(M) = r = |H| \geq n + \frac{n}{m} \geq n + \frac{n}{\bar{m}} = n + \frac{n}{\text{md } M}.$$

Lema 77 Sean n, m, ϱ enteros tales que $1 \leq m \leq n$ y

$$n + \frac{n}{m} \leq \varrho \leq 2n + 1 - m. \quad (3.5)$$

Entonces existe una descomposición

$$\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_{\varrho-n} \quad (3.6)$$

del espacio \mathbb{R}^n en suma vectorial directa de los subespacios $L_1, \dots, L_{\varrho-n}$ tal que

$$m = \dim L_1 \geq \dim L_2 \geq \dots \geq \dim L_{\varrho-n} \geq 1. \quad (3.7)$$

Prueba. Sean k, p enteros que satisfacen $1 \leq k < \frac{n}{m}$, $1 \leq p \leq m$, $km + p \leq n$. Consideremos la descomposición (3.6) con la propiedad de que $\dim L_1 = \dots = \dim L_k = m$, $\dim L_{k+1} = p$, y los otros subespacios $L_{k+2}, \dots, L_{\varrho-n}$ son unidimensionales, i.e., $\varrho = 2n + k + 1 - km - p$ (observemos que el número de subespacios unidimensionales es igual a $\varrho - n - (k+1) = n - (km + p) \geq 0$). Ya que $k \leq \frac{n}{m} - 1$, $p \leq m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varrho &\geq 2n + k + 1 - km - m = 2n - m + 1 - k(m-1) \\ &\geq 2n - m + 1 - \left(\frac{n}{m} - 1 \right) (m-1) = n + \frac{n}{m}, \end{aligned}$$

i.e., la primera desigualdad (3.5) es satisfecha. Furthermore, puesto que $k \geq 1$, $p \geq 1$, la desigualdad $\varrho \leq 2n + 2 - m - p \leq 2n + 1 - m$ se cumple, i.e., la segunda desigualdad (3.5) también es satisfecha.

Ahora demostraremos que para todo ϱ que satisface (3.5), es posible encontrar k, p los cuales realizan el número dado ϱ . Para $k = 1$, $p = 1$, se tiene $\varrho = 2n + 1 - m$, i.e.,

la cota superior en (3.5) es "realizable". Admitamos que un número $\rho > n + \frac{n}{m}$ es "realizable" para k, p adecuados. Observemos que $\rho > n + \frac{n}{m}$ implica $\rho - n > \frac{n}{m} \geq k + 1$ y, por lo tanto, existe el subespacio L_{k+2} . Si ahora $p < m$, entonces conservando k y reemplazando p por $p+1$, se "realice" $\rho - 1$. Y si $p = m$, entonces reemplazando k, p por $k+1, 1$, respectivamente, también "realice" el número $\rho - 1$. Continuando con este proceso, obtenemos finalmente los valores $k = \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor, p = n - km$, donde $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor$ es la parte entera de $\frac{n-1}{m}$. En este caso $\rho - n = k + 1$, i.e., ρ es el mínimo número que satisface $\rho \geq n + \frac{n}{m}$. Por lo tanto, todo ρ que satisface (3.5) es "realizable". ■

Prueba. (del Teorema 73) Supongamos que ρ satisface (3.5) y sea (3.6) la descomposición en suma vectorial directa construida en el lema 77. Denotemos por B_i la bola unitaria en el subespacio $L_i, i = 1, \dots, \rho - n$. Entonces

$$m = \dim B_1 \geq \dim B_2 \geq \dots \geq \dim B_k \geq 1,$$

donde $k = \rho - n$. En consecuencia, el cuerpo $M = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$ satisface la condición $\text{md } M = m$. Más aún, por BM5,

$$\rho_{\min}(M) = \rho_{\min}(B_1) + \dots + \rho_{\min}(B_k) =$$

$$(\dim B_1 + 1) + \dots + (\dim B_k + 1) = n + k = n + (\rho - n) = \rho.$$

puesto que en el Ejemplo 53 se demostró que $\rho(B^n) = n + 1$. ■

Lema 78 Sean n, m, ρ enteros tales que $n \geq m \geq 2$ y ρ satisface (3.5). Sea $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ la descomposición en suma vectorial directa construida en el lema 77, donde $k = \rho - n$. Hacemos $\dim B_i = n_i$ y escogemos en B_i vectores mínimamente dependientes $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, i = 1, \dots, k$. Sea $b_j = -a_0^{(1)} - a_0^{(j)}, j = 2, \dots, k$. Entonces

$$H = \{a_s^{(i)}, b_j\}, \quad i = 1, \dots, k, \quad s = 0, 1, \dots, n_i, \quad j = 2, \dots, k$$

es un sistema global de vectores con $\text{md } H = m$ y todo subsistema global $H' \subset H$ contiene no menos de ρ vectores.

Prueba. Para todo $i = 1, \dots, k$, los vectores $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$ forman un sistema global en el subespacio L_i . Por lo tanto, el sistema $H_0 = \{a_s^{(i)}, i = 1, \dots, k, s = 0, 1, \dots, n_i$ es global en \mathbb{R}^n y el sistema $H \supset H_0$ es global también.

Sean $v_0, v_1, \dots, v_t \in H$ vectores mínimamente dependientes y sea $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t = 0$ una dependencia positiva. Supongamos, para un índice $j = 2, \dots, k$, que $b_j = -a_0^{(1)} - a_0^{(j)}$ figura entre v_0, v_1, \dots, v_t , digamos $v_0 = b_j$. Si el vector $a_0^{(1)}$ no se encuentra entre v_1, \dots, v_t , entonces $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t = \lambda_0(-a_0^{(1)} - a_0^{(j)}) + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t$ no puede ser igual a cero, contradiciendo la construcción. Por lo que $a_0^{(1)}$ se encuentra entre v_1, \dots, v_t , digamos $v_1 = a_0^{(1)}$. Análogamente, el vector $a_0^{(j)}$ se encuentra entre v_2, \dots, v_t , digamos $v_2 = a_0^{(j)}$. Esto significa que el sistema v_0, v_1, \dots, v_t coincide con $b_j, a_0^{(1)}, a_0^{(j)}$, puesto que estos tres vectores son linealmente dependientes, y, por lo tanto $t = 2$. Por lo tanto, todo subsistema mínimamente dependiente de H o bien consiste únicamente de tres vectores o no contiene ningún vector b_j . En el segundo caso, el subsistema mínimamente dependiente está contenido en H_0 , i.e., coincide con uno de los sistemas $a_0^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$. Ahora, claramente $\text{md } H = m$, puesto que $m \geq 2$ y $m = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Sea, finalmente, $H' \subset H$ un subsistema global. Denotemos por π_i la proyección de \mathbb{R}^n sobre L_i tal que $\ker \pi_i$ contiene todos los L_1, \dots, L_k excepto a L_i . En otras palabras, si $x \in \mathbb{R}^n$ es representado en la forma $x = x_1 + \dots + x_k$, donde $x_1 \in L_1, \dots, x_k \in L_k$, entonces $\pi_i(x) = x_i, i = 1, \dots, k$. Claramente, $\pi_i(H')$ es un sistema global de vectores en L_i . Pero $\pi_i(H')$ consiste de los vectores $\pm a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$. Para $\dim L_i > 1$, se sigue que $\pi_i(H')$ contiene todos los vectores $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$. Si $\dim L_i = 1$, entonces H' contiene el vector $a_0^{(i)}$ y al menos uno de los vectores $-a_0^{(i)}, b_i$. Por lo tanto, el subsistema H' consta de no menos de $(n_1 + 1) + \dots + (n_k + 1) = n + k = \rho$ vectores. ■

Prueba. (del Teorema 74). Sea H el sistema de vectores construido en el lema 78 y sea $\text{norm } H$ el correspondiente sistema de vectores normalizado. Entonces $\text{norm } H$ es un subconjunto global de la esfera unitaria S^{n-1} . Denotemos por N el casco convexo de $\text{norm } H$ y por $M = N^*$ el cuerpo convexo dual de N . Puesto que H y, por lo tanto, \bar{H} es finito, N y M son politopos convexos. Vamos a demostrar que $H(M) = \text{norm } H$. Como N es un politopo, $\exp N = \text{vert } N = \text{norm } H$ y, por otra parte, $M^* = N^{**} = N$, entonces $H(M) = \text{norm } \exp M^* = \text{norm } \exp N = \text{norm } \bar{H} = \bar{H}$. Luego, $\text{md } M = \text{md } \bar{H} = \text{md } H = m$. Más aún, el lema 78 y BM3 implican $\rho_{\min}(M) = \rho$. Finalmente, M es indescomponible en suma vectorial directa por el Corolario 6 puesto que N es no-divisible. ■

3.2 Sistemas Inmovilizadores Minimales para Cuerpos de Boltianski y Cuerpos de Kincses

En la presente sección vamos a determinar los valores de $\varrho_{\min}(M)$ para los casos en que el cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es alguno de los cuerpos de Boltianski: stack, outcat o stack-outcat o alguno de los cuerpos de Kincses. Este hecho nos permitirá resolver el problema de Szökefalvi-Nagy para los casos $\varrho_{\min}(M) = 2n, 2n - 1$ y, por lo tanto, una solución completa de este problema en \mathbb{R}^3 . Asimismo, resolvemos los casos $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2, 2n - 3$ cuando, adicionalmente suponemos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es centralmente simétrico y, en consecuencia, resolvemos el problema de Szökefalvi-Nagy para cuerpos convexos centralmente simétricos en \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^5 .

Sabemos de los Teoremas 30, 32 y 33 que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es alguno de los cuerpos de Boltianski o de Kincses, $H(M)$ tiene una descripción bien determinada. Por lo tanto, la idea para realizar nuestro objetivo, i.e., la determinación de $\varrho_{\min}(M)$ para los M señalados, es investigar subsistemas globales de vectores de $H(M)$ y aplicar BM3.

Supongamos que el conjunto de vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n . Llamaremos al conjunto $E_k = \text{lin}\{e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ el k -ésimo *semiplano abierto coordinado*, $k = 1, \dots, n$. E_k determina dos semi-hiperespacios $E_k^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e'_k \rangle > 0\}$ y $E_k^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e'_k \rangle < 0\}$, donde e'_k es el vector ortogonal a E_k , a los cuales llamaremos también *semi-hiperespacios abiertos coordinados*. Claramente, e_k se encuentra en uno y en sólo uno de ellos.

Lema 79 Sea $H \subset S^{n-1}$ un 2-sistema de vectores tal que H tiene vectores particulares. Entonces, la cardinalidad $|H|$ de H satisface

$$|H| \geq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \text{ para } H \subset H_{(n)}, \text{ y } |H| \geq 2n - \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor, \text{ para } H \subset H_{(s)}.$$

Prueba. Sea $H \subset S^{n-1}$ un sistema de vectores global y $\text{md } H = 2$. Puesto que $\text{md } H = 2$, H satisface algunas de las relaciones (1.2), ..., (1.5) del Teorema 28. Supongamos que $H \subset H_{(n)}$ y que la cardinalidad $|H|$ de H es menor estrictamente que $2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Primeramente observemos que $e_k \in H$ para $k = 1, \dots, n$. Para ver esto, supongamos lo contrario, i.e., supongamos que existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $e_k \notin H$. Afirmamos que H está contenido en uno de los dos semi-hiperespacios determinados por E_k ; tal hiperespacio es diferente de aquel en el cual se encuentra e_k . En efecto, puesto que $H \subset \text{norm } H_{(n)}$ y $\text{norm } H_{(n)} - E_k \subset \left(\bigcup_{i < k} F_{ik} \right) \cup \left(\bigcup_{k < j} F_{kj} \right)$

concluimos que $H - E_k \subset \left(\bigcup_{i < k} F_{ik} \right) \cup \left(\bigcup_{k < j} F_{kj} \right)$. Luego, puesto que todos los conjuntos del lado derecho de la anterior contención están contenidos en un único semi-hiperespacio coordinado, concluimos que H no es global. Esto contradice la hipótesis y, por lo tanto, $\{e_1, \dots, e_n\} \in H$.

Sea i un entero $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $\langle e'_i, e_i \rangle > 0$. Puesto que H es global debe existir $v(i) \in H - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $v(i) \in E_i^-$, i.e., $v(i) \in \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e'_i \rangle < 0\}$. Observemos que es posible que $v(i) = v(j)$, $i \neq j$.

Sea $v \in H - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $v \neq -e_i$, $i = 1, \dots, n$, puesto que $H \subset H_{(n)}$, existe al menos un par de enteros i, j tal que $v \in F_{i,j}$ o $v \in F_{j,i}$. Del hecho de que $F_{l,m} \cap F_{p,q}$ es igual a $\{0\}$, si todos los índices son distintos, e igual a $-e_k$, si dos de los índices son iguales a k , concluimos que v pertenece a lo más a uno de los ángulos $F_{i,j}$ y, por lo tanto, a lo más a dos semi-hiperespacios coordinados, i.e., existen a los más dos índices i, j tales que $v = v(i) = v(j)$.

Por otro lado, si $v = -e_i$ para algún $i = 1, \dots, n$, es claro que v pertenece únicamente a un semi-hiperespacio abierto coordinado.

En resumen, tenemos que para cada semi-hiperespacio coordinado existe un vector de H y cada vector de H está en a lo más dos semi-hiperespacios coordinados.

Sean $v_1, \dots, v_\alpha \in H$ tales que v_i es igual a algún $-e_j$; $j = 1, \dots, n$ para i corriendo desde 1 hasta α , $0 \leq \alpha < n$ (si α fuera igual a n , entonces se tendría que $2n \leq |H| < 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lo cual es absurdo). Denotemos por r la cardinalidad del conjunto $H - \{e_1, \dots, e_n\}$. Luego, se tiene que $r \geq \alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor$ para $n - \alpha$ par y $r \geq \alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor + 1$ para $n - \alpha$ impar. De aquí, y puesto que $|H| < 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, tenemos que

$$n + \alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor \leq n + r = |H| < 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ para } n - \alpha \text{ par}$$

y

$$n + \alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor + 1 \leq n + r = |H| < 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ para } n - \alpha \text{ impar.}$$

Estas desigualdades nos conducen, para todos los posibles casos de las paridades de n y $n - \alpha$, a una contradicción. Veamos, por ejemplo, el caso n y $n - \alpha$ pares.

$$n + \alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor < 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\alpha + \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor < n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$2\alpha + 2 \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor < 2n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$2\alpha + n - \alpha < 2n - n,$$

i.e., $\alpha < 0$, lo cual es absurdo pues $0 \leq \alpha$. ■

Lema 80 Las estimaciones contenidas en el Lema 79 son exactas. En otras palabras, existe un sistema de vectores $H \subset S^{n-1}$ el cual es global, $\text{md } H = 2$, con vectores particulares tal que $|H| = 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, si $H \subset H_{(n)}$ o con $|H| = 2n - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, si $H \subset H_{(s)}$.

Prueba. Únicamente ilustraremos en detalle el caso $H \subset H_{(n)}$. Los demás se obtienen de forma análoga. Denotemos por m el número entero $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consideremos una familia de conjuntos $I_1, \dots, I_m \subset \{1, \dots, n\}$ con las siguientes propiedades: $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$, $|I_i| = 2$, $i = 1, \dots, m$ y, finalmente, si $I_i = \{p, q\}$, entonces $p < q$. Si $I_i = \{p, q\}$ denotamos por F_{I_i} al conjunto $F_{p,q}$.

Si n es par, consideremos el conjunto de vectores $H = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_m\}$ tales que

i) $e'_i \in F_{I_i}$, $i = 1, \dots, m$

ii) $e'_i \neq -e_k$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

Si n es impar, existe $r \in \{1, \dots, n\} - \bigcup_{i=1}^m I_i$. Consideremos, para este caso, el conjunto de vectores $H' = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_m, e'_{m+1}\}$ con

i)' $e'_i \in F_{I_i}$, $i = 1, \dots, m$, y $e'_{m+1} \in F_{1,r}$ si $r \neq 1$ o $e'_{m+1} \in F_{1,2}$ si $r = 1$

ii)' $e'_i \neq -e_k$, $i = 1, \dots, m+1$, $k = 1, \dots, n$.

Claramente, H y H' están contenidos en $H_{(n)}$.

Puesto que $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ y $e'_1 \in F_{I_1}$ vemos que los vectores $e'_1, e_p, e_q \subset H$ donde $I_1 = \{p, q\}$ son mínimamente dependientes y, por lo tanto, $\text{md } H \geq 2$. Por otro lado, puesto que $H \subset H_{(n)}$ el Teorema 28 nos da la contención contraria, i.e., $\text{md } H \leq 2$. Por lo que $\text{md } H = 2$.

Similarmente, $\text{md } H' = 2$.

Observemos ahora que $|H| = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Por otro lado, $|H'| = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Finalmente, veamos que tanto H como H' son sistemas globales. Sea R un hiperplano y u una de sus normales exteriores. Únicamente las tres situaciones siguientes pueden ocurrir:

1. $\langle e_i, u \rangle \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

2. $\langle e_i, u \rangle \leq 0$, $i = 1, \dots, n$.

3. Existen i, j enteros $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tales que $\langle e_i, u \rangle < 0$ y $\langle e_j, u \rangle > 0$.

Si R es tal que se tiene el caso 1, existe un entero $p \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\langle e_p, u \rangle > 0$ puesto que R es un hiperplano.

Si n es par, existe i , $1 \leq i \leq m$ tal que $p \in I_i$. Luego, en virtud de las propiedades i) y ii) de H , existen $x_p, x_q < 0$ tales que $e'_i = x_p e_p + x_q e_q$ y, por lo tanto, $\langle e'_i, u \rangle = \langle x_p e_p + x_q e_q, u \rangle = x_p \langle e_p, u \rangle + x_q \langle e_q, u \rangle < 0$.

Si n es impar y $p \neq r$, existe i , $1 \leq i \leq m$ tal que $p \in I_i$ y se repite el caso anterior.

Si n es impar, $p = r$ y $r \neq 1$, entonces $\langle e'_{m+1}, u \rangle = \langle x_1 e_1 + x_r e_r, u \rangle = x_1 \langle e_1, u \rangle + x_r \langle e_r, u \rangle = x_1 \langle e_1, u \rangle + x_p \langle e_p, u \rangle < 0$.

Si n es impar, $p = r$ y $r = 1$, entonces $\langle e'_{m+1}, u \rangle = \langle x_r e_r + x_2 e_2, u \rangle = x_r \langle e_r, u \rangle + x_2 \langle e_2, u \rangle = x_p \langle e_p, u \rangle + x_2 \langle e_2, u \rangle < 0$.

En cualquier caso, existen vectores en ambos semi-hiperespacios de R .

Análogamente, se ve que para el caso 2, existen vectores de H , si n es par, o vectores de H' , si n es impar, en ambos semi-hiperespacios de R .

El caso 3 es trivial puesto que $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ y $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H'$.

Luego, H y H' son globales. ■

Lema 81 Sea $I \subset S^{n-1}$ un sistema global de vectores. Si $\text{md } I = 1$, entonces la cardinalidad $|I|$ de I es igual a $2n$.

Prueba. Supongamos que $I \subset S^{n-1}$ es un sistema global y tal que $\text{md } I = 1$. Sea K un politopo cuyas normales exteriores unitarias de sus hipercaras son precisamente los vectores de I , i.e., $H(K) = I$.

Puesto que $\text{md } I = \text{md } K$ en virtud del Teorema 11, concluimos que $\text{him } K = \text{md } I$, i.e., $\text{him } K = 1$. Luego, del Teorema 9, se tiene que K es un paralelotopo. Por lo tanto, $I = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$ y, por lo que $|I| = 2n$. ■

Teorema 82 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo que es un stack. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Teorema 83 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo que es un outcat. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = 2n - 1.$$

Teorema 84 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo que es un stack-outcat tal que el conjunto de sus normales exteriores unitarias en puntos regulares $H(M)$ está contenido en $H_{(s)}$ con $s < n$. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = 2n - \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor.$$

Prueba. (del Teorema 82). Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un stack y, por lo tanto, $H \subset H_{(n)}$. Supongamos también que $\Omega \subset H(M)$ es global. Como $\Omega \subset H(M)$, entonces $\Omega \subset H_{(n)}$. Si $\text{md } \Omega = 1$, entonces $|\Omega| = 2n > 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ por lema 81. Si ahora $\text{md } \Omega = 2$, Ω satisface las hipótesis del lema 79 y, por lo tanto, $|\Omega| > 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. En ambos casos, $|\Omega| > 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. En virtud de BM3, $\varrho_{\min}(M) \geq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Finalmente, dependiendo de la dimensión n de \mathbb{R}^n , se contruyen los sistemas de vectores $H \subset H(M) \subset H_{(n)}$ y $H' \subset H(M) \subset H_{(n)}$ dados por el lema 80. Puesto que $|H| = |H'| = 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, concluimos que $\varrho_{\min}(M) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ por BM3 ya que H y H' son globales. ■

Lema 85 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, centrado en el origen, indescomponible y $\dim M \geq 4$. Si M satisface $\text{md } M = 3$, entonces $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$.

Prueba. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo que satisface las hipótesis del lema. En virtud del Teorema 32, existe una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n y $(n-1)$ conjuntos convexos, simétricos M_1, \dots, M_{n-1} tales que $\dim M_i = 2$, $M_i \subset \text{lin}\{e_1, e_{i+1}\}$ $1 \leq i \leq n-1$ y $M^* = \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right)$. Por otro lado, $\text{ext } M^* \subset \text{fr } M^* \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right)$ por lo que $\text{ext } M^* \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{lin}\{e_1, e_{i+1}\}$ y como $\text{exp } M^* \subset \text{ext } M^*$, concluimos, haciendo uso también del Teorema 38, que $H(M) = \text{norm exp } M^* \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{lin}\{e_1, e_{i+1}\}$.

Sea $I \subset H(M)$ con la propiedad de que la cardinalidad $|I|$ de I satisface $|I| < 2n - 2$. Vamos a mostrar que I no es global. En efecto, existe $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $I \cap \text{lin}\{e_1, e_{i_0+1}\}$ consiste de a lo más un vector (en caso contrario, $|I| \geq 2n - 2$). Ahora consideremos el hiperplano abierto coordinado E_{i_0+1} . Como $I \subset H(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{lin}\{e_1, e_{i+1}\}$ y puesto que $\text{lin}\{e_1, e_{i+1}\} \subset E_{i_0+1}$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$ e $i \neq i_0$, concluimos que $I - E_{i_0+1} \subset \text{lin}\{e_1, e_{i_0+1}\}$. Por lo tanto, vemos que en el complemento del semi-plano abierto coordinado E_{i_0+1} hay tantos vectores de I como vectores de I hay en $\text{lin}\{e_1, e_{i_0+1}\}$. Este número es igual a 1, como se observó arriba, y, por lo tanto, no puede pertenecer simultáneamente a los semi-espacios abiertos coordinados $E_{i_0+1}^+$, $E_{i_0+1}^-$, por ser estos disjuntos. De aquí que I no es global. Luego, cualquier sistema global $I \subset H(M)$ necesariamente satisface $|I| \geq 2n - 2$. De este hecho y de BM3 concluimos que $2n - 2 \leq \varrho_{\min}(M)$.

Por otra parte, por BM4 tenemos que $\varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M = 2n + 1 - 3 = 2n - 2$. De las dos desigualdades anteriores, se tiene el resultado deseado. ■

Lema 86 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, centrado en el origen e indescomponible en suma vectorial directa y $n \geq 5$. Adicionalmente, supongamos que M satisface $\text{md } M \leq 4$. Entonces $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$ si $\text{md } M = 3$ y $\varrho_{\min}(M) = 2n - 3$ si $\text{md } M = 4$.

Prueba. Si $\text{md } M = 1$, entonces M es un paralelotopo en virtud del Teorema 9. Si $\text{md } M = 2$ y M es descomponible, entonces, por el Teorema 12, M es representado como una suma vectorial directa de cuerpos de dimensión menor o igual que 2. Por otra parte, la hipótesis de indescomponibilidad de M implica que $\dim M \leq 2$, sin embargo, esto contradiría la otra hipótesis de que $\dim M \geq 5$ puesto que $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$ y M tiene interior no vacío (por ser un cuerpo). Luego, los casos $\text{md } M \leq 2$ son imposibles. Si $\text{md } M = 3$, estamos en condiciones de aplicar el lema 85 y, por lo tanto, $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$. En el caso restante, $\text{md } M = 4$ tenemos que M satisface una de las condiciones (A) o (B) del Teorema 33 de [Kincses 2]. Por el hecho de que $\text{md } M = 4$, se sigue, de BM4, que $\varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M = 2n + 1 - 4 = 2n - 3$.

Para finalizar será suficiente mostrar que si M satisface alguna de las condiciones (A) o (B) del Teorema 33 [Kincses 2], entonces $\varrho_{\min}(M) \geq 2n - 3$.

Primeramente, supongamos que M tiene la representación (A) del Teorema 33. De manera similar a como se razonó en la parte inicial de la prueba del lema 85 podemos concluir que

$$H(M) \subset \text{lin}\{e_1, e_2, e_3\} \cup \text{lin}\{e_1, e_4\} \cup \dots \cup \text{lin}\{e_1, e_n\}$$

Sea $I \subset H(M)$. Supongamos que existe un entero $i_0 \geq 4$ tal que $I \cap \text{lin}\{e_1, e_i\}$ consta de a lo más un vector. Entonces, de la contención de arriba, $I - E_{i_0}$ consta de a lo más un vector. De aquí que I no es global.

Por otro lado, si $I \cap \text{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ consta de únicamente dos vectores k_1 y k_2 linealmente independientes (el caso k_1 y k_2 linealmente dependientes es más fácil), entonces I también no es global. En efecto, son posibles los siguientes casos:

1. $k_1 = \pm e_1$ (y por lo tanto, $k_2 \neq \pm e_1$).
2. $k_2 = \pm e_1$ (y por lo tanto, $k_1 \neq \pm e_1$).
3. $k_1 \neq \pm e_1 \neq k_2$.

En el caso (1), consideremos el hiperplano $\text{lin}\{k_2, e_1, e_4, e_5, \dots, e_n\}$ el cual denotaremos por L . De la contención de arriba tenemos que $I - L = \emptyset$ y, por lo tanto, I no es global.

El caso (2) se verifica de manera análoga.

Para el caso (3), definimos L como antes. También se tiene de la contención de arriba que $I - L = \{k_1\}$ si $k_1 \notin \text{lin}\{e_1, k_2\}$ o $I - L = \emptyset$ en caso contrario. En ambos casos, I es no global. Las observaciones anteriores nos conducen a concluir que si L es global, la cardinalidad $|L|$ de L , es tal que $|L| > 2(n-3) + 2 = 2n-4$, i.e., $|L| \geq 2n-3$. Luego, de BM3, se tiene que $\varrho_{\min}(M) \geq 2n-3$. ■

3.3 El Problema de Fejes Tóth

3.3.1 Solución al Problema de Fejes Tóth para los Casos $\varrho_{\min}(M) = 2n, 2n-1$

Teorema 87 Para un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, la igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n$ se satisface si y sólo si M es un paralelotopo.

Prueba. Si $\text{md } M > 1$, entonces por BM4 $\varrho_{\min}(M) \leq 2n-1$. Por lo tanto, la igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n$ implica que $\text{md } M = 1$ y de acuerdo al Teorema 9 (de Szökefalvi-Nagy), M es un paralelotopo. Recíprocamente, si M es un paralelotopo, entonces $\text{md } M = 1$, y, por lo tanto, al sustituir este valor en la desigualdad del Teorema 72 se tiene $2n \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n$. ■

Teorema 88 Un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ satisface $\varrho_{\min}(M) = 2n-1$ si y sólo si $M = B \oplus P$ donde las siguientes condiciones son satisfechas

- (i) B es un conjunto convexo, compacto de dimensión $q \leq n$, indescomponible en suma vectorial directa y P es un paralelotopo.
- (ii) $\text{md } B = 2$.
- (iii) Ya sea que $q \geq 3$, $\text{ind } B = 1$, o $q \geq 4$, $\text{ind } B = 2$, o $q = 3$, $\text{ind } B = 3$, o $q = 2$.

Prueba. Primeramente observemos que, si B es un conjunto convexo, compacto, indescomponible en suma vectorial directa y de dimensión q con $q \geq 3$, $\text{md } B = 2$,

y $\text{ind } B = s$, entonces por los Teoremas 82, 83, 84 podemos concluir

$$\varrho_{\min}(B) = 2q - \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor \quad \text{cuando } s < q \quad \text{y} \quad \varrho_{\min}(B) = 2q - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \quad \text{para } s = q. \quad (3.8)$$

Sea ahora $M = B \oplus P \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo el cual tiene la forma descrita por el Teorema. Se tiene de (3.8) que $\varrho_{\min}(B) = 2q-1$ para todos los casos. El paralelotopo P tiene dimensión $n-q$; si $q = n$, entonces P degenera en un punto. Por BM5,

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(B) + \varrho_{\min}(P) = (2q-1) + 2(n-q) = 2n-1.$$

Esto demuestra la suficiencia.

Ahora probemos la necesidad. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo tal que $\varrho_{\min}(M) = 2n-1$ y sea $M = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus P$ su descomposición en suma vectorial directa donde B_1, \dots, B_k son conjuntos convexos, indescomponibles y distintos de segmentos y P es un paralelotopo. Entonces $\varrho_{\min}(B_i) \leq 2 \dim B_i - 1$, $i = 1, \dots, k$, por el Teorema 87. Luego, por BM5,

$$\varrho_{\min}(M) \leq (2 \dim B_1 - 1) + \dots + (2 \dim B_k - 1) + 2 \dim P = 2n - k. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, $k = 1$, i.e., $M = B \oplus P$, donde B es un conjunto convexo, compacto e indescomponible y P es un paralelotopo. Como $\varrho_{\min}(M) = 2n-1$, por los Teoremas 87 y BM5, se tiene que $2n-1 = \varrho_{\min}(B) + \varrho_{\min}(P) = \varrho_{\min}(B) + 2(n-q)$, i.e., $\varrho_{\min}(B) = 2q-1$, donde $q = \dim B$.

Si ahora $\text{md } B \geq 3$, entonces, por BM3, $\varrho_{\min}(B) \leq 2n-2$. Luego, $\varrho_{\min}(M) = 2n-1$ implica $\text{md } B = 2$. Por el Teorema 30, $H(B) \subset \bar{H}_{(s)}$, donde s es alguno de los enteros $0, 1, \dots, q$. El caso $s = 0$ es imposible, puesto que $\varrho_{\min}(H_{(0)}) = 6$, i.e., en este caso $\varrho_{\min}(M) = 2q-2$. Finalmente, (3.8) implica para $s \geq 1$, que $\varrho_{\min}(B) = 2q-1$ se cumple sólo en los casos indicados en el Teorema 88 (el caso $q = 3$, $s = 2$ es imposible). ■

Corolario 89 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que $\varrho_{\min}(M) = 7 - \text{md } M$. De manera más precisa, $\varrho_{\min}(M) = 6$ si y sólo si M es un paralelepípedo. Si M no es un paralelepípedo, $\varrho_{\min}(M) = 5$ si y sólo si ya sea que M es descomponible o $\text{ind } M = 1$ (un stack en términos de [5]), o $\text{ind } M = 3$ (un outcat en términos de [5]). Para cualquier otro cuerpo tridimensional $\varrho_{\min}(M) = 4$.

3.3.2 Solución al Problema de Fejes Tóth para Cuerpos Centralmente Simétricos con $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2, 2n - 3$

En la Sección 1.2.3 se dió una lista completa de todos los cuerpos convexos *centralmente simétricos* $M \subset \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{md } M \leq 4$. Esto nos da la posibilidad de resolver el Problema de Fejes Tóth para aquellos casos en que $\varrho_{\min}(M) \geq 2n - 3$.

Teorema 90 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, centrado en el origen. La igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$ se satisface si y sólo si

- a) $M = K \oplus P$, donde las siguientes condiciones son satisfechas
- i) K es un conjunto convexo, compacto de dimensión $q \leq n$, indescomponible en suma vectorial directa y el cual está centrado en el origen y P es un paralelotopo.
 - ii) $\text{md } K = 3$.
- b) $M = K_1 \oplus K_2 \oplus P$ con $\dim K_i = 2; i = 1, 2$, y P es un paralelotopo.

Prueba. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo el cual está centrado en el origen y tal que $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$ y sea $M = K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus P$ su descomposición en suma vectorial directa con la propiedad de que K_1, \dots, K_m son indescomponibles y centrados en el origen. Recordemos que $\varrho_{\min}(K_i) \leq 2 \dim K_i - 1; i = 1, \dots, m$ (por el Teorema 87) de aquí y de (3.9) tenemos que $2n - 2 \leq 2n - k$, es decir, o bien $k = 1$ o $k = 2$.

Supongamos que $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$ y $M = K_1 \oplus K_2 \oplus P$. Observemos que $\text{md } K_i \leq 3; i = 1, 2$. En efecto, si $\text{md } K_i \geq 4$ para algún $i = 1, 2$, entonces $\text{him } K_i \geq 4$, por el Teorema 11 y, por el Teorema 13, $\text{him } M \geq 4$, i.e., $\text{md } M \geq 4$. Por lo tanto, $\varrho_{\min}(M) \leq 2n - 3$ (por BM4) lo cual contradice la hipótesis.

Ahora supongamos que al menos uno de los $K_i, i = 1, 2$, digamos K_1 , tiene la propiedad de que $\text{md } K_1 = 2$ y $\dim K_1 > 2$. Por el Teorema 30, si $\text{md } K_1 = 2$, entonces $H(K_1) \subset \text{norm } H_{(s)}, s = 0, \dots, n$, sin embargo, esto es imposible puesto que ninguno de los $\text{norm } H_{(s)}$ es centralmente simétrico.

Ahora consideremos el caso $\text{md } K_i = 3; i = 1, 2$. Sean q_1 y q_2 las dimensiones de los cuerpos K_1 y K_2 , i.e., $\dim K_i = q_i, i = 1, 2$. Por otro lado, $\dim P = n - (q_1 + q_2)$. Entonces los cuerpos $K_i, i = 1, 2$, están descritos por el Teorema 32 y, por lo tanto, por el lema 85 tenemos $\varrho_{\min}(K_i) = 2q_i - 2, i = 1, 2$. De BM5 se sigue que

$$\varrho(M) = \varrho(K_1) + \varrho(K_2) + \varrho(P) = (2q_1 - 2) + (2q_2 - 2) + 2(n - (q_1 + q_2)) = 2n - 4$$

lo cual contradice la hipótesis.

Consideremos el caso $\text{md } K_1 = 3$ y $\dim K_2 = 2$. Se tiene que $\varrho_{\min}(K_2) = 3$ por el Teorema 72, puesto que K_2 no es un paralelogramo. Si q es igual a la dimensión $\dim K_1$ de K_1 , entonces $\dim P = n - (q + 2)$. Por otro lado, como $\text{md } K_1 = 3$, K_1 está descrito por el Teorema 32. Por BM5 y el Lema 86

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(K_1) + \varrho_{\min}(K_2) + \varrho_{\min}(P) = (2q - 2) + 3 + 2(n - (q + 2)) = 2n - 3$$

y, nuevamente, se contradice la hipótesis.

La última posibilidad para $k = 2$ es $\dim K_i = 2, i = 1, 2$. En este caso, se tiene que $\dim P = n - 4$. De BM5,

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(K_1) + \varrho_{\min}(K_2) + \varrho_{\min}(P) = 3 + 3 + 2(n - 4) = 2n - 2.$$

Finalmente consideremos el caso $k = 1$, i.e., $M = K \oplus P$, aquí K es un conjunto convexo, compacto, indescomponible, el cual está centrado en el origen y P es un paralelotopo. Puesto que $\varrho_{\min}(M) = 2n - 2$, tenemos $\varrho_{\min}(K) = 2q - 2$ donde $q = \dim K$ (por el Teorema 85 y BM5). Si ahora $\text{md } K \geq 4$, entonces $\varrho_{\min}(K) \leq 2n - 3$ (por BM3). Luego, $\varrho(K) = 2n - 2$ implica $\text{md } K = 3$ ($\text{md } K = 2$ es imposible puesto que ninguno de los $\bar{H}_{(s)}$ es centralmente simétrico). ■

3.4 Una Nota Sobre Sistemas Inmovilizadores Primitivos Maximales de Cuerpos Convexos

Sean x, y dos puntos de la frontera $\text{fr } M$ del cuerpo convexo, con frontera regular $M \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que x, y son puntos *antípodas* si los hiperplanos soportes de M en los puntos x e y son paralelos. Si el punto x tiene un único punto antípoda este será denotado por x^* . Si y es el punto antípoda de x , entonces x es el punto antípoda de y . El punto antípoda de x es denotado por x^* .

Denotamos por K_p la unión de las líneas soportes de M a través del punto p y por Γ_p la unión de las líneas que pasan por p e intersectan a M . Los conjuntos $C(p) = \text{fr } M \cap K_p$ y Γ_p serán llamados *la shadow boundary especial* con respecto a p y el cono de *iluminación* (de *visión*) de M con vértice en p , respectivamente. Por $s(e)$ denotaremos la *shadow boundary* de M con respecto a la dirección e , i.e., el conjunto de todos los puntos de M los cuales están sobre líneas soportes de M paralelas a e [Bu].

Puesto que M tiene frontera regular, el conjunto $\text{fr } M$ está dividido por $s(e)$ en dos conjuntos abiertos disjuntos, para uno de los cuales todos sus puntos son

iluminados por e , mientras que ningún punto de $\text{fr } M$ que pertenece al otro conjunto abierto es iluminado por e . Denotemos por $T^+(e)$ al primero de tales conjuntos y por $T^-(e)$ al segundo.

Finalmente, denotemos por $L(A)$ el espacio lineal generado por el conjunto de vectores A y por $n(x)$ la normal exterior unitaria de M en el punto $x \in \text{fr } M$.

Ahora, indicaremos algunos sencillos, pero importantes resultados.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo estrictamente convexo, con frontera regular.

Observación 91 Cualesquiera dos shadow boundaries $s(e_i)$ y $s(e_j)$, $e_i, e_j \in S^2$, tienen intersección no vacía que es igual a

- i) el conjunto de dos puntos antípodas si $e_i \neq \pm e_j$; tales puntos antípodas son denotados por $t(e_i, e_j)$ y $t^*(e_i, e_j)$, respectivamente,
- ii) $s(e_i)$ si $e_i = e_j$ o $e_i = -e_j$.

Observación 92 Si $z \in T^+(e)$ entonces $z^* \in T^-(e)$, y si $z \in T^-(e)$ entonces $z^* \in T^+(e)$.

Lema 93 Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un polígono convexo y sea $\{b_1, \dots, b_n\}$ el conjunto de sus vértices $n \geq 5$. Consideremos los polígonos convexos P_k con vértices $b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k+1}, \dots, b_n$, $k = 1, \dots, n$. Entonces

$$\bigcap_{k=1}^n (\text{int } P_k) \neq \emptyset.$$

Prueba. De la construcción de los polígonos P_k se ve que los interiores de cualesquiera tres de estos polígonos tienen intersección no vacía ya que cada terna de los polígonos P_k tiene una arista en común. Así, en virtud del Teorema de Helly,

$$\bigcap_{k=1}^n (\text{int } P_k) \neq \emptyset.$$

■

Lema 94 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, $q \in \text{fr } M$ un punto frontera regular, y l una dirección definida por un vector no cero e . Entonces q es iluminado por la dirección l si y sólo si $\langle e, n(q) \rangle < 0$.

Prueba. Supongamos que el punto p es iluminado por l , esto es, $p + \lambda e \in \text{int } M$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña. Puesto que $n(p)$ es ortogonal al (único) plano soporte de M en p , $\langle n(p), (p + \lambda e) - p \rangle < 0$, i.e.,

$$\lambda \langle n(p), e \rangle < 0.$$

Si ahora tenemos que $\lambda \langle n(p), e \rangle < 0$, aplicando el razonamiento anterior en sentido inverso, vemos que p es iluminado por l . ■

Prueba. (del Teorema 63) En un sistema coordenado (x_1, x_2, x_3) para \mathbb{R}^3 , podemos suponer que $p = (0, 0, 0)$.

Consideremos n puntos $a_0, \dots, a_{n-1} \in C(p)$, $n \geq 5$. Sea

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$$

la proyección desde el punto p sobre el plano Π el cual tiene la propiedad de que separa M de p . Por la elección de Π , $\pi(M)$ es un conjunto bidimensional, convexo y compacto.

Cambiando la numeración de los puntos a_i , si es necesario, podemos suponer que el polígono P con cuyos vértices son los puntos $\pi(a_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, es convexo. En virtud del lema 93, existe un punto a el cual pertenece al interior de cada polígono P_k (en la notación del lema 93).

Consideremos los puntos (vectores) $a_{k-1}, a_k, a_{k+1} \in C(p)$. Afirmamos que uno de los puntos $t(a_{k-1}, a_{k+1})$, $t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$ (digamos, el segundo) es iluminado por la dirección definida por a , i.e.,

$$t^*(a_{k-1}, a_{k+1}) \in T^+(a). \quad (3.10)$$

Más aún, si $q \in C(p)$ pertenece al mismo arco de $C(p)$, con puntos extremos a_{k-1} y a_{k+1} , que a_k , entonces

$$t(a_{k-1}, a_{k+1}) \in T^+(q). \quad (3.11)$$

Por la observación 92, la relación (3.10) es equivalente a la inclusión

$$t(a_{k-1}, a_{k+1}) \in T^+(-a). \quad (3.12)$$

El plano $L(\{a_{k-1}, a_{k+1}\})$ divide \mathbb{R}^3 en dos semi-espacios abiertos L_k^+ , L_k^- cuyas normales unitarias exteriores respectivas son denotadas por n_k^+ y $n_k^- = -n_k^+$, i.e.,

$$L_k^+ = \{x : \langle x, n_k^+ \rangle < 0\} \text{ y } L_k^- = \{x : \langle x, n_k^- \rangle < 0\}.$$

Los planos soportes de M en los puntos $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ y $t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$ son paralelos al vector a_{k-1} , puesto que $t(a_{k-1}, a_{k+1}), t^*(a_{k-1}, a_{k+1}) \in s(a_{k-1})$ y los planos soportes en los puntos de $s(a_{k-1})$ son paralelos a a_{k-1} .

Análogamente, estos planos soportes son paralelos a a_{k+1} .

Así, tenemos que los planos soportes en $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ y $t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$ son paralelos a $L(a_{k-1}, a_{k+1})$, i.e., ya sea que

$$n(t(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^+ \quad \text{y} \quad n(t^*(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^- \quad (3.13)$$

o

$$n(t^*(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^+ \quad \text{y} \quad n(t(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^- \quad (3.14)$$

Puesto que los puntos $\pi(q)$ y a no pertenecen a $L(\{a_{k-1}, a_{k+1}\})$ (recordemos que $a \in \text{int } P_k, k = 0, \dots, n-1$ y $\pi(q) \notin P_k$), tenemos que $q, a \notin L(\{a_{k-1}, a_{k+1}\})$. Más aún, a y q pertenecen a diferentes semiespacios de los dos semiespacios determinados por $L(\{a_{k-1}, a_{k+1}\})$ [fig. 8].

Por lo tanto, ya sea que

$$a \in L_k^+ \quad \text{y} \quad q \in L_k^- \quad (3.15)$$

o

$$a \in L_k^- \quad \text{y} \quad q \in L_k^+ \quad (3.16)$$

En virtud de la arbitrariedad de la notación tanto de los semiespacios determinados por $L(\{a_{k-1}, a_{k+1}\})$ como de los puntos antípodas $t(a_{k-1}, a_{k+1}), t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$, podemos suponer que (3.13) y (3.16) se cumplen, i.e.,

$$\langle q, n_k^+ \rangle < 0, n(t^*(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^- \quad \text{y} \quad \langle a, n_k^- \rangle < 0, n(t(a_{k-1}, a_{k+1})) = n_k^-.$$

De estas relaciones, llegamos a que

$$\langle a, n(t^*(a_{k-1}, a_{k+1})) \rangle = \langle a, n_k^- \rangle < 0, \quad (3.17)$$

y

$$\langle q, n(t(a_{k-1}, a_{k+1})) \rangle = \langle q, n_k^+ \rangle < 0. \quad (3.18)$$

En virtud del lema 94, los puntos $t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$ y $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ son iluminados por las direcciones de a y q , respectivamente. Luego, las relaciones (3.10), (3.11) (y, por lo tanto, (3.12)) se satisfacen.

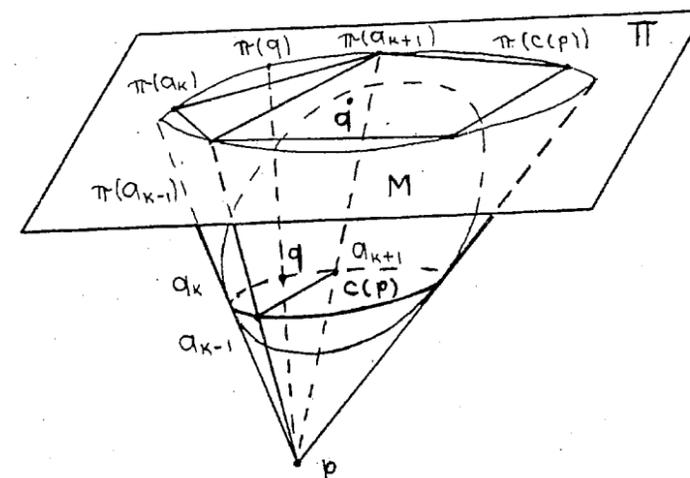


Figura 8:

Intercambiando, si es necesario, la notación de los puntos $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ por $t^*(a_{k-1}, a_{k+1})$, podemos suponer que las relaciones (3.10), (3.11) (y, por lo tanto, (3.12)) se satisfacen para todo $q \in C(p)$ que pertenece al mismo arco de $C(p)$, con puntos extremos a_{k-1} y a_{k+1} , que $a_k, k = 0, \dots, n-1$.

Denotemos por F el conjunto $\cup_{k=1}^n t(a_{k-1}, a_{k+1}) \cup \{p\}$. Vamos a demostrar que F es un sistema inmovilizador primitivo de K .

Sea $e \in \mathbb{R}^3$ un vector no cero. Si existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda e) \cap \text{int } M \neq \emptyset$, entonces p es iluminado por la dirección definida por e .

Ahora supongamos que $e \in C(p)$. Si $e = a_k$ para algún índice $k = 0, \dots, n-1$, entonces e pertenece al arco de $C(p)$ con puntos extremos a_{k-1}, a_{k+1} . Por lo tanto, por (3.11), $t(a_{k-1}, a_{k+1}) \in T^+(e)$, i.e., $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ es iluminado por la dirección del vector e . Si ahora $e \neq a_k$, entonces e pertenece a algún arco de $C(p)$ determinado por algún par de vectores a_i . Supongamos que e pertenece al arco determinado por los vectores a_{k-1} y a_k , en consecuencia, e pertenece al arco de $C(p)$ determinado por a_{k-1}, a_{k+1} . A partir de (3.11), $t(a_{k-1}, a_{k+1}) \in T^+(e)$, i.e., $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ es iluminado

por la dirección del vector e .

Ahora supongamos que e pertenece al complemento de Γ_p . Puesto que $\mathbb{R}^3 - \Gamma_p \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} L_k^+$, existe un índice k_0 tal que $e \in L_{k_0}^+$, i.e., $\langle e, n_{k_0}^+ \rangle < 0$. De aquí que $\langle e, n(t(a_{k_0-1}, a_{k_0+1})) \rangle < 0$ y, por lo tanto, $t(a_{k_0-1}, a_{k_0+1})$ es iluminado por la dirección determinada por e por el lema 94. Así, por BM1, F es un sistema inmovilizador de M .

Para ver que F es primitivo veamos que la dirección determinada por a_k ilumina únicamente al punto $t(a_{k-1}, a_{k+1})$ y la dirección determinada por a ilumina únicamente al punto p . Del Teorema 52 se tiene el resultado.

Observemos que como $a \in \bigcap_{k=1}^n (\text{int } P_k)$ y $a_k \in P_j$ para toda $j \neq k$, la línea $L(a_{k-1}, a_{k+1}) \cap \Pi$ es la única línea entre todas las líneas $L(a_{i-1}, a_{i+1}) \cap \Pi$, $i = 0, \dots, n-1$, que separa los puntos a y a_k en el plano Π . Luego, la relación (3.16) se satisface para a y a_k (a_k en lugar de q). Procediendo de la misma forma a como se hizo para obtener las relaciones (3.17), (3.18), vemos que la dirección determinada por a_k ilumina el punto $t(a_{k-1}, a_{k+1})$.

Por otro lado, como para $i \neq k$ a y a_k están en el mismo semiplano determinado por la línea $L(a_{i-1}, a_{i+1}) \cap \Pi$, a y a_k pertenecen al mismo semiespacio determinado por el plano $L(a_{i-1}, a_{i+1})$, $i \neq k$. En virtud de (3.10), $\langle a, n(t^*(a_{i-1}, a_{i+1})) \rangle < 0$ o, lo que es igual, $\langle a, n_i^- \rangle < 0$, $i \neq k$. De los dos hechos anteriores tenemos que $\langle a_k, n_i^- \rangle < 0$, $i \neq k$, i.e., $\langle a_k, n(t^*(a_{i-1}, a_{i+1})) \rangle < 0$ y, por lo tanto, a_k ilumina a $t^*(a_{i-1}, a_{i+1})$, $i \neq k$, por el lema 94. Finalmente, puesto que una dirección no puede iluminar simultáneamente una pareja de puntos antípodas, lo anterior implica que a_k no ilumina a ninguno de los puntos $t(a_{i-1}, a_{i+1})$, $i \neq k$.

Por otra parte, en virtud de que la relación (3.10) se satisface para toda $k = 0, \dots, n-1$ y puesto que, como se señaló anteriormente, una dirección no puede iluminar simultáneamente una pareja de puntos antípodas, a ilumina únicamente al punto p . ■

3.5 Poliedro de 14 Vértices Inmovilizado Primitivamente por sus Vértices

Por comodidad supongamos que \mathbb{R}^3 tiene un sistema rectangular de coordenadas (x_1, x_2, x_3) . Consideremos el cubo I^3 con caras paralelas a los ejes coordenados y con uno de sus vértices en el origen, i.e.,

$$I^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Denotemos por $-I^3$ la imagen de I^3 bajo la simetría central $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x \mapsto -x$.

Consideremos el punto $t \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t_0)$, con $t_0 > \frac{3}{2}$, y los poliedros

$$N = \text{conv}(I^3 \cup (-I^3)) \text{ y } M = \text{conv}(N \cup \{t, -t\}).$$

Primeramente, observemos que M tiene 14 vértices. En efecto, M y N tienen 12 vértices en común, M tiene todos los vértices de N excepto los vértices $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, ya que estos puntos son puntos interiores de M , puesto que $t_0 > \frac{3}{2}$, y los otros dos vértices son precisamente t y $-t$.

Dividamos el conjunto A de vértices de M en dos subconjuntos A_1 y A_2 de tal manera que

- (i) Cada uno de estos consta de 7 elementos, y
- (ii) no existen elementos a y b de A_1 para los cuales $a = s(b)$, i.e., $a = -b$.

Denotemos los elementos de A_1 por $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ y los de A_2 por $a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_7$. De (i) y (ii) vemos que es posible tomar la enumeración de los vértices de tal manera que $a'_i = -a_i$ $i = 1, 2, \dots, 7$ (fig. 9). Afirmamos que A es un sistema inmovilizador primitivo de M .

Puesto que el conjunto de vértices $V(N)$ de N es un sistema inmovilizador de N y ya que $N \subset M$ es muy fácil ver, haciendo uso de BM1, que $V(M)$ es un sistema inmovilizador de M .

Por otro lado, para ver que $V(M)$ es primitivo veremos que para cada $a \in V(M)$ existe una dirección que ilumina únicamente al punto a y a ningún otro punto de $V(M)$. Del Teorema 52 se seguirá el resultado.

Sean a, b, c tres vectores de \mathbb{R}^3 . Llamaremos al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha(a - c) + \beta(b - c) + c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

el plano determinado por los vectores (puntos) a, b, c . El plano determinado por los vectores a, b, c será denotado por $P(a, b, c)$.

Primeramente, observemos que $P(a_2, a_5, a_7) = P(a'_2, a'_5, a'_7)$. Por lo tanto, el hexágono H cuyos vértices son los puntos $a_2, a_5, a_7, a'_2, a'_5, a'_7$ es plano y como M es centralmente simétrico, H es un hexágono con aristas opuestas paralelas. Por otro lado, el plano $P(-a_6, a_4, a_1)$ es paralelo al plano $P(a_2, a_5, a_7)$, es decir, paralelo al plano de H . En efecto, puesto que, por un lado, los vectores $(a_4 - a_1)$ y $(a_5 - a_2)$ son

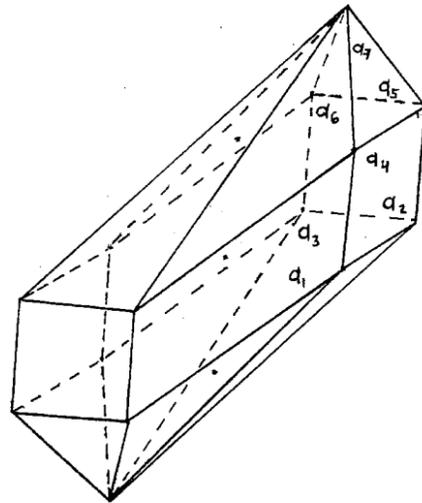


Figura 9:

paralelos y puesto que, por otra parte, a_5 es paralelo a $(a_1 + a_6)$, entonces $P(a_2, a_5, 0)$ y $P(-a_6, a_4, a_1)$.

Finalmente, como $P(a_2, a_5, 0) = P(a_2, a_5, a_7)$, se tiene que $P(a_2, a_5, a_7)$ es paralelo a $P(-a_6, a_4, a_1)$.

Como H es un hexágono con caras opuestas paralelas, para cada vértice a de H existe una dirección e_a , paralela a $P(a_2, a_5, a_7)$, que ilumina, con respecto a $\text{rint } H$, únicamente a este punto y a ningún otro vértice de H . Puesto que $\text{rint } H \cap \text{int } M = \text{rint } H$, e_a ilumina, con respecto a M , únicamente a a y a ningún otro punto de H .

Como e_a es paralela a $P(a_2, a_5, a_7)$, e_a es paralela a $P(-a_6, a_4, a_1)$, en virtud de la observación hecha un poco más arriba. Luego, e_a no ilumina a ningún otro vértice de M porque cada una de los vértices de M , que no es vértice de H , tiene como plano soporte de M a $P(-a_6, a_4, a_1)$ o a $P(-a_6, a_4, a_1)$ los cuales son ambos paralelos a e_a .

Para finalizar, basta verificar que para cada uno de los vértices de M que no es vértice de H , i.e., para cada uno de los puntos $a_1, a_1', a_3, a_3', a_4, a_4', a_6, a_6'$, existe una dirección que ilumina únicamente a este punto y a ningún otro elemento de A . Veamos esto para a_1 ; para los demás vértices la verificación de la propiedad

mencionada arriba se realiza de manera completamente análoga.

Consideremos la línea l determinada por la intersección de los planos $P(a_2, a_5, a_6)$ y $P(a_1, a_2, -a_7)$. Sean e_{a_1} y $-e_{a_1}$ los vectores paralelos a l . Como A es un sistema inmovilizador, e_{a_1} ilumina al menos un punto de A . Sin embargo, observemos que, puesto que e_{a_1} y $-e_{a_1}$ son paralelos a l , e_{a_1} y $-e_{a_1}$ no iluminan a ningún vértice de M que tenga la propiedad de tener un plano soporte de M que sea paralelo a $P(a_2, a_5, a_6)$ o a $P(a_1, a_2, -a_7)$. Ahora bien, ya que a_1 y $-a_1$ son los únicos puntos de A que no tienen la propiedad anterior, e_{a_1} debe iluminar o bien a a_1 o bien a $-a_1$. En el primer caso, hemos terminado (pues e_{a_1} no ilumina a $-a_1$). Si e_{a_1} ilumina a $-a_1$, entonces $-e_{a_1}$ ilumina a a_1 y hemos terminado (pues $-e_{a_1}$ no ilumina a $-a_1$). Por lo tanto, A es primitivo.

3.6 Una Cota Superior para Cardinalidades de Sistemas Inmovilizadores Primitivos Maximales en Función de $\dim M$ y $\text{md } M$

Para cardinalidades máximas de sistemas inmovilizadores primitivos de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ inicialmente tan sólo se tenía la estimación

$$\varrho_{\max}(M) \leq \infty \quad (3.19)$$

la cual también es exacta. Esto se sigue de [B-Ma2] y [Mo] donde son construidos cuerpos convexos con la propiedad de que $\varrho_{\max}(M) = \infty$. Sin embargo, la estimación (3.19) no está escrita en términos del funcional de Boltianski $\text{md } M$. A continuación, vamos a resolver el problema de encontrar estimaciones para las cardinalidades de sistemas inmovilizadores primitivos maximales en función de la dimensión $\dim M$ y el funcional de Boltianski $\text{md } M$ [B-Mo2]. Para tal propósito serán de gran utilidad los siguientes dos resultados, el segundo de los cuales fue demostrado por V. Boltianski.

Lema 95 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un *stack*, *outcat* o *stack-outcat* de dimensión n . Entonces $\varrho_{\max}(M) \leq 2n$.

Lema 96 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ el politopo particular de dimensión 4 tal que $\text{md } M = 2$, i.e., $H(M) = H_{(0)}$ (vea Teorema 27). Entonces $\varrho_{\max}(M) = 18$.

3.6.1 Primera Solución

Veamos en detalle el caso en que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un stack. Como M es un stack este tiene la descripción (1.6) dada en la sec. 1.2.2 del Cap.1. Consideremos la proyección $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow P_{1i}$ tal que $\ker \pi_i = L_{1j}$.

Diremos que $a \in \text{fr } M$ pertenece al índice i , si $\pi_j(a) \in \text{rint } G_{1j}$ para todo j excepto para i (y, consecuentemente, $\pi_i(a) \in \text{rfr } G_{1i}$, puesto que $a \in \text{fr } M$). Es posible que $a \in \text{fr } M$ no pertenezca a ningún índice, i.e., $\pi_j(a) \in \text{rfr } G_{1j}$ para más de un índice j .

Sea A un sistema inmovilizador primitivo de M .

Observemos que si $a \in \text{fr } M$, $a \in \text{fr}(G_{1i} \oplus L_{1i})$ para algún $i \in \{2, \dots, n\}$ y, por lo tanto, existe un hiperplano soporte de $(G_{1i} \oplus L_{1i})$ en a paralelo a L_{1i} . De esta observación se concluye que si $a \in \text{fr } M$ y a no pertenece a ningún índice, i.e., existen al menos dos índices i, j tales que $a \in \text{fr}(G_{1i} \oplus L_{1i}) \cap \text{fr}(G_{1j} \oplus L_{1j})$, entonces a no es iluminado por ninguno de los vectores $\pm e_2, \dots, \pm e_n$.

Por otro lado, observemos que si $a \in A$ y a pertenece al índice i , entonces de los vectores $\pm e_2, \dots, \pm e_n$ los únicos que tienen la posibilidad de iluminar a a son $\pm e_i$.

Como A es un sistema inmovilizador de M , por BM1, debe existir al menos un punto a_i^+ en A el cual es iluminado por e_i , $i \neq 1$. Por la misma razón debe existir $a_i^- \in A$ el cual es iluminado por $-e_i$, $i \neq 1$. Hemos señalado que si alguno de los puntos $a_i^+, a_i^-, i = 2, \dots, n$ no perteneciera a algún índice; digamos a_j^+ , entonces no podría ser iluminado por ninguno de los vectores $\pm e_2, \dots, \pm e_n$, y, en particular, no podría ser iluminado por e_j lo cual contradice la elección de a_j^+ . Luego, a_i^+ (a_i^-) pertenece a algún índice $k \in \{2, \dots, n\}$ ($l \in \{2, \dots, n\}$). Veamos ahora que el caso $i \neq k$ ($i \neq l$) es imposible. En efecto, si a_i^+ pertenece al índice k , $i \neq k$, por la segunda observación hecha arriba, a_i^+ puede ser iluminado únicamente por $\pm e_k$ y no por e_i , sin embargo, esto contradice la elección de a_i^+ . Por lo tanto, a_i^+ (a_i^-) pertenece al índice i . De aquí que $a_i^+ \neq a_j^+$ y $a_i^+ \neq a_j^-$, $i \neq j$. Además, claramente, $a_i^+ \neq a_i^-$ pues en caso contrario e_i y $-e_i$ iluminarían al mismo punto lo cual es imposible.

En resumen, existen los puntos $a_i^+, a_i^- \in A \subset \text{fr } M$, $i = 2, \dots, n$, diferentes entre sí, donde para cada j a_j^+ y a_j^- pertenecen al índice j y de entre los vectores $\pm e_2, \dots, \pm e_n$ únicamente e_j ilumina a a_j^+ (respectivamente, únicamente $-e_j$ ilumina a a_j^-).

Es fácil ver que ninguno de los puntos $a_i^+, a_i^-, i = 2, \dots, n$, es iluminado por e_1 . Luego, puesto que A es sistema inmovilizador, existe $a_0 \in A$ diferente de a_i^+, a_i^- , $i = 2, \dots, n$ el cual es iluminado por e_1 . Notemos que $a_0 \in \text{fr } M \cap \text{rint } \Pi$ (donde Π es el paralelotopo determinado por $\Pi = [e_i, -e_i] \oplus \dots \oplus [e_i, -e_i]$), pues en caso

contario, i.e., si $a_0 \notin \text{rint } \Pi$, a no sería iluminado por e_1 .

Denotemos por B al conjunto $\{a_0\} \cup \{a_i^+\}_{i=2}^n \cup \{a_i^-\}_{i=2}^n$. Afirmamos que todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$, no paralelo a $-e_1$, ilumina al menos un punto de B .

Observese que si resulta que el conjunto B es un sistema inmovilizador de M , entonces este es un sistema primitivo, en virtud del Teorema 52, por las propiedades, mencionadas arriba, de los puntos $\{a_i^+\}_{i=2}^n \cup \{a_i^-\}_{i=2}^n$ y por el hecho de a_0 es el único punto de B iluminado por e_1 .

Sea f una de las normales unitarias al hiperplano donde está contenido Π . Supongamos que $\langle f, m \rangle \leq 0$ para todo $m \in M$ y $\langle f, e_1 \rangle < 0$. Sea $e = e'_1 + \dots + e'_n \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero donde e'_i es un múltiplo de e_i .

Si $\langle e, f \rangle < 0$, e ilumina a a_0 por el lema 94.

Entonces sólo nos resta el caso $\langle e, f \rangle \geq 0$. Dado que $e \neq 0$, existe i tal que $e'_i \neq 0$. Veamos el caso en que $i \neq 1$. Como e'_i es un múltiplo de e_i , e'_i ilumina a a_i^+ o a_i^- .

Supongamos que a_i^+ es iluminado por e'_i , i.e., $a_i^+ + \lambda e'_i \in \text{int } M$. Por otro lado, a_i^+ se puede expresar como $a_i^+ = b_{1i}^+ e_1 + \dots + b_{ni}^+ e_n$, $b_{ji}^+ \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Luego, $\pi_i(a_i^+ + \lambda e'_i) = (b_{1i}^+ e_1 + b_{ii}^+ e_i) + \lambda e'_i \in \text{rint } G_{1i}$ para λ pequeña.

Puesto que $\langle e, f \rangle \geq 0$, concluimos que $\langle e'_1, f \rangle \geq 0$. Además, como $\langle f, e_1 \rangle < 0$, lo anterior implica que e'_1 es paralelo a $-e_1$ y, por lo tanto, en virtud de la descripción de G_{1i} , $(b_{1i}^+ e_1 + b_{ii}^+ e_i)$ es iluminado por e'_1 o existe una línea soporte de G_{1i} que pasa por este punto y es paralela a e'_1 .

De los dos hechos anteriores tenemos que

$$(b_{1i}^+ e_1 + b_{ii}^+ e_i) + \lambda(e'_1 + e'_i) \in \text{rint } G_{1i}. \quad (3.20)$$

Por otra parte, puesto que a_i^+ pertenece al índice i , $\pi_k(a_i^+) = b_{1i}^+ e_1 + b_{ki}^+ e_k \in \text{rint } G_{1,k}$ para $k > 1$, $k \neq i$. Por lo tanto, existe $\lambda_k > 0$ tal que

$$(b_{1i}^+ e_1 + b_{ki}^+ e_k) + \lambda(e'_1 + e'_k) \in \text{rint } G_{1,k} \quad (3.21)$$

para $\lambda < \lambda_k$, $k > 1$, $k \neq 1$.

Sea $\lambda' = \min_{k>1, k \neq 1} \{\lambda_k\}$. De las relaciones (3.20) y (3.21) y del hecho de que M tiene la representación (1.6), concluimos que

$$(b_{1i}^+ e_1 + \dots + b_{ni}^+ e_n) + \lambda(e'_1 + \dots + e'_n) = a_i^+ + \lambda e \in \text{int } M, \text{ para } \lambda < \lambda',$$

i.e., a_i^+ es iluminado por e . Así, todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$, no paralelo a $-e_1$, ilumina al menos un punto de B .

Si $-e_1$ ilumina alguno de los puntos de B , $B = A$ y, por lo tanto, $|A| = 2n - 1$.

Si ningún punto de B es iluminado por $-e_1$, A y B difieren únicamente por un punto a que precisamente es aquel punto que es iluminado por $-e_1$. En efecto, si existiera algún punto $b \in A \setminus B$, $b \neq a$, entonces $B \cup \{a\} \subset A \setminus \{b\}$. Puesto que $B \cup \{a\}$ es sistema inmovilizador (en virtud de BM3), de la contención anterior concluiríamos que $A \setminus \{b\}$ también sería sistema inmovilizador lo cual contradice la hipótesis de que A es primitivo. Por lo tanto, $|A| = 2n$.

3.6.2 Segunda Solución

Primeramente, describiremos la manera de encontrar el número $\varrho_{\max}(M)$ con ayuda del cuerpo polar M^* . Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con el origen en sus interior y sea M^* su cuerpo polar, i.e.,

$$M^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ hiperplanos soportes de M^* y $B_i = M^* \cap \Gamma_i$, $i = 1, \dots, k$. Diremos que $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es un cosistema inmovilizador de M^* si para todo semiespacio abierto $P \subset \mathbb{R}^n$ con hiperplano frontera $\text{fr } P$ a través del origen, al menos uno de los conjuntos B_1, \dots, B_k está completamente contenido en P . El cosistema inmovilizador $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es primitivo si ningún subconjunto propio de $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es cosistema inmovilizador de M^* . Denotaremos por $\varrho_{\min}^*(M^*)$ el máximo de los enteros k para el cual existe un cosistema inmovilizador primitivo $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ de M^* (si existen cosistemas inmovilizadores primitivos de M^* con cardinalidad arbitrariamente grande, escribiremos $\varrho_{\min}^*(M^*) = \infty$).

Lema 97 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen en su interior la relación

$$\varrho_{\min}^*(M^*) = \varrho_{\min}(M)$$

se satisface.

Prueba. Sea $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \text{fr } M$ un sistema inmovilizador para el cuerpo M . Denotemos por $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ los planos polares de los puntos x_1, \dots, x_k , i.e.,

$$\Gamma_i = x_i^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x_i \rangle = 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Entonces $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ son hiperplanos soportes del cuerpo polar M^* . Vamos a ver que $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es un cosistema inmovilizador de M^* . Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un semiespacio

abierto con hiperplano frontera a través del origen. Denotemos por l la dirección definida por la normal exterior p del semiespacio P . Puesto que F es un sistema inmovilizador de M , existe un punto $x_i \in F$ el cual es iluminado por la dirección l (por BM1), i.e., existe $\lambda > 0$ tal que el punto $x_\lambda = x_i + \lambda p$ pertenece al interior de M . Podemos suponer, disminuyendo λ si es necesario, que x_λ es distinto del origen. Sea z un punto del conjunto $B_i = M^* \cap \Gamma_i$. Puesto que $z \in \Gamma_i$, tenemos que

$$\langle z, x_i \rangle = 1. \quad (3.22)$$

Más aun, puesto que x_λ es un punto interior de M , el hiperplano polar x_λ^* no tiene puntos en común con M^* , i.e., el cuerpo M^* está situado en el semiespacio $\{y : \langle y, x_\lambda^* \rangle < 1\}$. En particular,

$$\langle z, x_\lambda^* \rangle < 1 \quad (3.23)$$

De (3.22) y (3.23) obtenemos que $\langle z, x_\lambda - x_i \rangle < 0$, i.e., $\langle z, \lambda p \rangle < 0$, y, por lo tanto, $\langle z, p \rangle < 0$, ya que $\lambda < 0$. Esto significa que $z \in P$. En virtud de la arbitrariedad de z , tenemos que $B_i \subset P$. Luego, $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es un cosistema inmovilizador de M^* . Siguiendo en sentido inverso el razonamiento anterior, encontramos que, recíprocamente, si $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es un cosistema inmovilizador de M^* , entonces los correspondientes puntos polares x_1, \dots, x_k determinan un sistema inmovilizador de M . Esto implica que el cosistema inmovilizador $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ es primitivo si y sólo si el sistema inmovilizador x_1, \dots, x_k es primitivo. ■

Prueba. (del lema 95) Investigaremos en detalle el caso cuando M es un *stack* de dimensión n ; los casos restantes se resuelven de manera semejante.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un *stack* de dimensión n . En virtud del Teorema 30, existe una base e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n y conjuntos convexos bidimensionales, cerrados C_2, \dots, C_n tales que

i) $C_l \subset \text{lin}(e_1, e_l)$ y $\text{ext } C_l \subset \{e_1\} \cup \Pi_{1,l}$ para $l = 1, \dots, n$,

ii) $M^* = \text{conv}(C_2, \dots, C_l)$. Para cada $l = 2, \dots, n$ denotamos por F_l^+ el ángulo $\{v : v = x_1 e_1 + x_l e_l, x_1 \leq 0, x_l > 0\}$, y por F_l^- el ángulo $\{v : v = x_1 e_1 + x_l e_l, x_1 \leq 0, x_l < 0\}$.

Sea $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ un cosistema inmovilizador de M^* y $B_1 = M^* \cap \Gamma_1, \dots, B_k = M^* \cap \Gamma_k$. Observemos que, para $l \geq 2$, al menos uno de los conjuntos B_1, \dots, B_k está contenido en el semiespacio coordinado E_l^+ . Denotemos tal conjunto por B_l^+ .

Asímismo, para $l \geq 2$, al menos uno de los conjuntos B_1, \dots, B_k está contenido en el semiespacio coordenado E_l^- . Denotemos este conjunto por B_l^- y B_l^+ , respectivamente, B_l^- , es un punto o un segmento que está contenido en $\text{fr } M^* \cap F_l^+$, respectivamente, en $\text{fr } M^* \cap F_l^-$.

Finalmente, al menos uno de los conjuntos B_1, \dots, B_k está contenido en el semiespacio coordenado E_1^+ , y no es difícil ver que este conjunto B_1^+ coincide con $\{e_1\}$.

Luego, tenemos $2n-1$ conjuntos diferentes $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$ seleccionados de entre los conjuntos B_1, \dots, B_k y, por lo tanto, $k \geq 2n-1$. Más aún, sea E un semiespacio abierto con hiperplano frontera a través del origen. Si $e_1 \notin E$ y $E \neq E_1^-$, entonces E contiene al menos uno de los ángulos $F_2^+, \dots, F_n^+, F_2^-, \dots, F_n^-$, de donde éste contiene al menos uno de los conjuntos $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$. Si ahora $e_1 \in E$, entonces E contiene al conjunto $B_1^+ = \{e_1\}$. Por lo tanto, todo semiespacio abierto E con $o \in \text{fr } E$ distinto de E_1^- contiene al menos uno de los $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$.

Por otro lado, si el semiespacio E_1^- contiene al menos uno de los conjuntos $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$, entonces todo semi-espacio abierto de \mathbb{R}^n con hiperplano frontera a través del origen contiene al menos uno de los conjuntos $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$, es decir, tenemos un cosistema inmovilizador de M^* tomado de los $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ que contiene $2n-1$ hiperplanos. En este caso $k = 2n-1$. Si resulta que el semiespacio E_1^- no contiene alguno de los conjuntos $B_l^+, B_l^-, l = 2, \dots, n$, entonces es necesario adicionar un conjunto más de los conjuntos B_1, \dots, B_k , es decir, $k = 2n$. Por tanto, en todo caso $\varrho_{\min}^*(M^*) \leq 2n$. Del lema 3.22, se obtiene que $\varrho_{\min}(M) \leq 2n$. ■

3.6.3 Estimación Para las Cardinalidades Máximas de Sistemas Inmovilizadores Primitivos

Teorema 98 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Si $\text{md } M = 1$ (i.e., M es un paralelotopo de dimensión n), entonces $\varrho_{\max}(M) = 2n$. Si $\text{md } M = 2$, entonces

$$\varrho_{\max}(M) \leq \frac{9}{2}n + \alpha_n, \quad (3.24)$$

donde

$$\alpha_n = 0 \quad \text{para } n \equiv 0 \pmod{4}, \quad \alpha_n = -\frac{5}{2} \quad \text{para } n \equiv 1 \pmod{4}, \quad (3.25)$$

$$\alpha_n = -3 \quad \text{para } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad \alpha_n = -\frac{11}{2} \quad \text{para } n \equiv 3 \pmod{4}. \quad (3.26)$$

Si $\text{md } M \geq 3$, entonces $\varrho_{\max}(M) \leq \infty$.

Todas las estimaciones son exactas (i.e., existe un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{md } M$ prescrito para el cual la cota superior es alcanzada).

Por lo tanto, junto con la desigualdad del Teorema 72, obtenemos las siguientes estimaciones exactas:

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\max}(M) = 2n \quad \text{para } \text{md } M = 1,$$

$$\frac{3}{2}n \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \frac{9}{2}n + \alpha_n \quad \text{para } \text{md } M = 2, \quad (3.27)$$

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \infty \quad \text{para } \text{md } M \geq 3.$$

Prueba. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n para el cual se tiene que $\text{md } M = 1$. Por el Teorema 9 M es un paralelotopo y, por lo tanto, todo sistema inmovilizador primitivo F de M consta de $2n$ puntos y cada uno de los puntos de F está situado en el interior relativo de una y sólo una de las cara de M .

Consideremos ahora el caso $\text{md } M = 1$ y denotemos por $M \subset \mathbb{R}^n$ el cuerpo $M = M_3 \oplus I \oplus \dots \oplus I$, donde M_3 es un cuerpo tridimensional que es el casco convexo de un cuerpo estrictamente convexo, con frontera regular K y un punto que no pertenece a K , mientras que cada sumando I es un segmento. Además, el número de sumandos es igual a $n-3$. Entonces M es un cuerpo convexo con $\text{md } M = 3$ y $\dim M = n$. Del Teorema 63 se concluye que $\varrho_{\max}(M) = \infty$, esto es, se alcanza la cota superior señalada en el Teorema 98.

Para finalizar la prueba, será suficiente establecer que las estimaciones, indicadas en el Teorema 98 para el caso $\text{md } M = 2$ se alcanzan, es decir, son cotas exactas. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo tal que $\text{md } M = 2$ y sea $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ su descomposición en suma vectorial directa en cuerpos convexos indescomponibles. Por el Teorema 13 $\text{md } M_i \leq 2, i = 1, \dots, k$. Entonces

$$\varrho_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k) \quad (3.28)$$

en virtud del Teorema 66. Más aún, para cada $M_i, i = 1, \dots, k$ se tienen las siguientes posibilidades:

a) $\dim M_i = 1$, i.e., M_i es un segmento y, por tanto, $\varrho_{\max}(M_i) = 2$.

- b) $\dim M_i = 2$, i.e., M_i es un conjunto convexo bidimensional distinto de un paralelogramo; en este caso $\varrho_{\max}(M) \leq 6$ por el Teorema de Tomor-Fudali \square .
- c) $\dim M_i \geq 3$, y M es un stack, outcat o stack-outcat. En este caso $\varrho_{\max}(M_i) \leq 2n$ por el lema 95.
- d) M_i es el politopo especial de dimensión 4 ($H(M_i) = H_{(0)}$). Para esta posibilidad $\varrho_{\max}(M_i) = 18$ por el lema 96.

Si para algún índice i se presenta el caso b) con $\varrho_{\max}(M_i) \leq 5$, entonces podemos reemplazar M_i por un hexágono con lados opuestos paralelos, aumentando con esto el número (3.28). Por lo tanto, para obtener el máximo valor posible del número (3.28), debemos suponer que todo M_i con $\dim M_i = 2$ es un hexágono con lados opuestos paralelos, y, por tanto, $\varrho_{\max}(M_i) = 6$.

Por (3.28), tenemos ahora

$$\varrho_{\max}(M) = 2q_a + 6q_b + 2D + 18q_d \quad (3.29)$$

donde q_a, q_b, q_d son los números de los sumandos en (3.28) para los cuales, respectivamente, se realizan los casos a), b), c) y D es la suma de las dimensiones de los sumandos M_i para los cuales el caso c) se presenta.

Supongamos que para algún índice i el sumando M_i es un stack, outcat o stack-outcat de dimensión n_i con $n_i \geq 3$. Entonces podemos reemplazar éste por $M'_i = H \oplus I \oplus \dots \oplus I$ donde H es un hexágono con lados opuestos paralelos y el número de segmentos I es igual a $n_i - 2$. Al hacer esta sustitución, el número (3.29) se incrementa, puesto que $\varrho_{\max}(M'_i) = 2n_i + 2 > \varrho_{\max}(M_i)$. Esto significa que para obtener la cota superior, es necesario suponer que no existen sumandos para los cuales el caso c) se presenta, es decir, $D = 0$.

Vemos que para obtener la cota superior, el cuerpo M tiene una descomposición en suma vectorial directa de la siguiente forma

$$M = I \oplus \dots \oplus I \oplus H \oplus \dots \oplus H \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi$$

donde Π es el politopo especial cuatro-dimensional. Ahora notemos que si el número de sumandos H es mayor que 1, entonces podemos reemplazar $H \oplus H$ por Π aumentando el número (3.29). Similarmente, si el número de sumandos de I es mayor que, entonces podemos reemplazar $I \oplus I$ por H , y de nuevo aumentará el número (3.29).

Por tanto, para alcanzar la cota superior únicamente los siguientes cuatro casos son posibles

- $M = \Pi \oplus \dots \oplus \Pi$
- $M = I \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi$
- $M = H \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi$
- $M = I \oplus H \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi$

Estos casos corresponden, respectivamente, a las posibilidades $\dim M \equiv 0 \pmod{4}$, $\dim M \equiv 1 \pmod{4}$, $\dim M \equiv 2 \pmod{4}$, $\dim M \equiv 3 \pmod{4}$ y de aquí se tienen las relaciones (3.25) y (3.26). Por ejemplo, en el caso $n = \dim M = 4p + 3$, tenemos

$$\varrho_{\max}(M) = 18p + 8 = 18 \left(\frac{n-3}{4} \right) + 8 = \frac{9}{2}n - \frac{11}{2},$$

De acuerdo con la segunda fórmula (3.26). ■

Bibliografía

- [AMMo] J. L. Arocha, L. Montejano, E. Morales: *A quick proof of Höbinger-Burton-Larman's Theorem*. *Geom. Dedicata* 63 (1996), 331-335.
- [Ba1] E. Baladze: *Solution of the Szökefalvi-Nagy problem for a class of convex polytopes*. *Geom. Dedicata* 49 (1994), 25-38.
- [Ba2] E. Baladze: *Solution of the Szökefalvi-Nagy problem for zonoids*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 310 (1990), 11-14; English transl. in *Soviet Math. Doklady* 41 (1990).
- [Be] K. Bezdek: *The problem of the illumination of the boundary of a convex body by affine subspaces*. *Mathematika*, 38 (1991), 362-375.
- [Bo] B. Bollobás: *Fixing system for convex bodies*. *Studia Sci. Math. Hungar.* 2 (1967), 351-354.
- [B1] V. G. Boltyanski: *Helly's theorem for H -convex sets*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 226 (1976), no. 2, 249-252; English transl. in *Soviet Math. Doklady* 17 (1976).
- [B2] V. G. Boltyanski: *Generalization of a theorem of Szökefalvi-Nagy*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 228 (1976), no. 2, 674-77.
- [B3] V. G. Boltyanski: *A new step in the solution of the Szökefalvi-Nagy problem*. *Discrete Comput. Geom.* 8 (1992), 27 - 49.
- [B-Ma1] V. G. Boltyanski, H. Martini: *Combinatorial geometry of belt bodies*. *Results Math.* 28 (1995), 224-249.
- [B-Ma2] V. G. Boltyanski, H. Martini: *On maximal primitive fixing system for convex bodies*. *Beiträge zur Algebra and Geometrie* 37 (1996), no. 1, 199-207.

- [B-Ma3] V. G. Boltyanski, H. Martini: *Fixing and Hindering systems in combinatorial geometry*. Por aparecer.
- [B-M-S1] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan: *Excursion into Combinatorial Geometry*. Springer, 1997. xiii + 419 pp.
- [B-Mo1] V. G. Boltyanski, E. Morales Amaya: *Minimal fixing systems for convex bodies*. *Journal of Applied Analysis* 1 (1995), no. 1, 1-13. T.
- [B-Mo2] V. G. Boltyanski, E. Morales Amaya: *Cardinalities of primitive fixing systems for convex bodies*. Por aparecer.
- [B-F] Bonnesen and W. Fenchel: *Theorie der convexen Körper*.
- [Br] G. R. Burton: *Section of convex bodies*. *J. London Math. Soc.* (2) 12 (1976), 331-336.
- [Bu] H. Busemann: *The geometry of geodesics*. Academic Press. 1955.
- [Da] L. Danzer: Review 2942. *Math. Reviews* 26 (1963), 569-570.
- [D-G-K] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee: *Helly's theorem and its relatives*. *Proc. Sympos. Pure Math.* vol.7, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, 101-180.
- [Fe] L. Fejes Toth: *On primitive polyhedra*. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 13(1962), 379-383.
- [F] S. Fudali: *Six-points primitive fixing in the plane*. *Demonstratio Math.* 19 (1986), 379-387.
- [Fu] M. Fujiwara: *Über die Anzahl der Kantenlinien einer geschlossenen konvexen Fläche*. *Tōhoku Math. J.* Vol. 10 (1916) pp. 99-103.
- [Gr] B. Grünbaum: *Fixing systems and inner illumination*. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15 (1964), 161-163.
- [Ki] J. Kincses: *The classification of 3- and 4-Helly-dimensional convex bodies*. *Geom. Dedicata* 22 (1987), 283 - 301.
- [Mi] H. Minkowski: *Geometrie der Zahlen*. (Leipzig and Berlin 1910) 256 pp.

- [Mo] Morales Amaya: *A note on maximal primitive fixing systems for convex bodies*. Note di Matematica Vol. 16, no.2 (1996).
- [S] R. Schneider: *Convex Bodies*. The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [So] P. S. Soltan: *Helly's theorem for d -convex sets*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 205 (1972), No. 3; English transl. in Soviet Math. Doklady 13 (1973), No. 4.
- [Sz] B. Szökefalvi-Nagy: *Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper*. Acta Sci. Math. 15 (1954), no. 3-4, 169-177.
- [T] B. Tomar: *The fixing problem of convex figures* (in Hungarian: Russian and German summaries). Mat. Lapok 14 (1983), 120-123.
- [Za] V. C. Zaguskin: *On circumscribed and inscribed ellipsoids of extremal volume*. Uspekhi Mat. Nauk., 13 (1958), no. 6 (84), pp. 89-93 (Russian).